

Prof. Ing. Jan Štecha, CSc.

OPTIMÁLNÍ ROZHODOVÁNÍ A ŘÍZENÍ

Kopie transparentů



2004
Vydavatelství ČVUT

OPTIMÁLNÍ ROZHODOVÁNÍ A ŘÍZENÍ

Jan Štecha

2004

Předmluva:

Toto skriptum je určeno posluchačům oboru Technická kybernetika. Slouží jako podklad pro přednášky přednášce se stejným názvem. Skriptum tvoří kopie transparentů, které obsahují podstatné části přednášené látky. Skriptum slouží jako doplněk skriptu Optimální rozhodování a řízení od stejného autora.

Rozsah látky obsažené ve skriptu je značný, proto bude při přednáškách kladen důraz na vybrané partie a látka doplňována novějšími poznatky.

Čtení látky do kapitol je uspořádáno takovým způsobem, aby kapitoly tvořily náplň jednotlivých přednášek. To umožní posluchačům orientaci v jednotlivých přednáškách. Ideální způsob studia tohoto přednášky je ten, že posluchači předem prostudují probíranou látku a přednáška bude věnována diskusi a obtížným partím látky.

Metody optimalizace se stále vyvíjejí, proto je jim v literatuře věnována velká pozornost. V tomto oboru existuje mnoho publikací a také podkladů pro přednášky na univerzitách v zahraničí. Některé složitější metody optimalizace jsou probírány v navazujících přednáškách pro doktorandy.

Osnova přednášek:

1. Úvod. Lineární programování (LP)	5 – 26
2. Lineární programování, simplexová metoda, dualita v LP	29 – 60
3. Úvod do teorie her - antagonistický a neantagonistický konflikt	61 – 94
4. Nejmenší čtverce (LS), Choleskyho faktORIZACE, LDU faktORIZACE	97 – 120
5. Aktualizace faktorů, QR dekompozice, singulární dekompozice (SVD)	121 – 135
6. Nelineární programování, volné a vázané extrémny, Karushova-Kuhnova-Tuckerova věta	137 – 158
7. Nelineární programování - sedlový bod a dualita, podmínky regularity a konvexnosti	161 – 182
8. Numerické metody nelineárního programování I.	185 – 215
9. Numerické metody nelineárního programování II.	217 – 249
10. Numerické metody nelineárního programování III.	253 – 296
11. Variční metody I.	297 – 328
12. Variční metody II.	329 – 350
13. Dynamické programování	352 – 397
14. Princip maxima	401 – 430

Literatura:

- J. Štecha: Optimální rozhodování a řízení. Skriptum ČVUT. FEL. 2000
- D.G. Luenberger: Linear and Nonlinear Programming. Addison-Wesley Co. Reading, 1989
- Bryson A. E., Yu Chi Ho : Applied Optimal Control. Massachusetts. Waltham, 1969.
- Boyd S., Vandenberghe L.: Convex Optimization.
<http://www.stanford.edu/boyd/>
- Přednášky

Úvod:

Optimalizační problémy se vyskytují v každém oboru lidské činnosti.
 Optimalizační problém vznikne v situaci, kdy je nutno vybrat (zvolit, rozhodnout) nějakou variantu řešení.
 Snažíme se vybrat variantu řešení, která je pro nás v nějakém smyslu nejvýhodnější.
 Matematická formulace optimalizačního problému - je třeba vytvořit matematický model situace - vytvořit systém.

Porovnat různé varianty řešení a vybrat nejlepší variantu.

Model reálné situace (reálného objektu) je vždy zjednodušen.

Potíže:

- Matematicky zpracovatelný model situace nepopisuje věrně realitu.
- Skutečnosti blízký model nebude matematicky zpracovatelný.
- Volba kritéria, podle kterého vybíráme nejlepší variantu řešení. Někdy subjektivní.
- Často nutno podle výsledků upravit model i modifikovat kritérium.

Přechod od reálného optimalizačního problému k jeho matematickému modelu je velmi důležitý a podstatně ovlivňuje využitelnost výsledků.

neboli pomocí odpovídajících vektorů a matic

$$\max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\}.$$

2. Problémy plánování

Jedná se o problémy nejvhodnějšího plánování investic do výrobních zařízení, zajištění financování komplexních projektů, případně plánování výroby.

Problém plánování výroby na určitém časovém horizontu ($t \in [0, T]$).

Známa poptávková funkce $d(t)$, $r(t)$ je velikost produkce za jednotku času (je omezena).

Výrobní náklady jsou úměrně velikosti produkce a skladovací náklady rostou úměrně s množstvím neprodaného zboží $x(t)$.

$$\dot{x}(t) = r(t) - d(t), \quad r(t) \geq 0, \quad x(t) \geq 0.$$

Kritériem - celkové výrobní náklady (chceme minimalizovat volbou $r(t)$)

$$J = \int_0^T (cr(t) + h x(t)) dt.$$

1

ÚVOD

LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ

Situaci, při níž je potřeba se rozhodnout - rozhodovací situace.

Existuje mnoho situací, jejichž matematický model je statický.

Zabývá se tím samostatný vědní obor - **matematické programování**.

Jsou-li vztahy mezi veličinami lineární a kritérium je také lineární - **lineární programování**.

Obecná úloha tohoto typu - **nelineární programování**.

Je-li modelem situace dynamický systém - **dynamická optimalizace, problém optimálního řízení**.

Často převládá problém dynamické optimalizace na statický problém (existuje řada účinných numerických metod).

Optimalizační problémy

1. Alokační problémy

Optimální rozdělení zdrojů - určení optimálního výrobního programu.

Výrobce má výrobní zařízení - schopná vyrábět n druhů výrobků z m surovin.

Problém je rozdělit suroviny na možné výrobky tak, abychom maximalizovali zisk.

Zisk z jednoho výrobku j -tého typu je c_j , výrobce ho vyrábí x_j kusů.

Na výrobu j -tého výrobku potřebuje výrobce a_{ij} jednotek suroviny i -tého typu.

Výrobce má k dispozici b_i jednotek suroviny i -tého typu.

Maximalizace zisku při uvažování omezení zdrojů surovin

$$\max\left\{\sum_{j=1}^n c_j x_j : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, x_j \geq 0\right\}$$

3. Problémy optimálního řízení dynamických systémů

Požadavky vyjádříme volbou kritéria kvality řízení

- zohledňuje odchylky od požadované trajektorie
- vynaloženou řídicí energii

4. Problémy aproximace

Aproximace funkce $f(t)$ na určitém intervalu jinou funkcí $p(t)$ (nejčastěji polynomen)

Chyba aproximace $e(t) = f(t) - p(t)$ byla minimální vzhledem k určitému kritériu

$$\int_a^b e^2(t) dt, \text{ nebo } \max_{a \leq t \leq b} |e(t)|, \text{ případně } \int_a^b |e(t)| dt.$$

5. Problémy estimace (odhadování)

Problémem je odhad určité veličiny z nepřesných pozorování.

Jedná se o speciální třídu aproximačních problémů. Vyžadujeme přesnou formulaci kritéria i vlastností chyb měření.

6. Konfliktní situace - hry

Existuje mnoho situací s protikladnými zájmy účastníků.

Modelem takové situace je hra.

Optimalizační problémy v podmínkách neurčitosti

- Je třeba brát v úvahu riziko
- Využívat získávání informace během rozhodovacího procesu

Příklad 1: Chceme rozdělit kapitál na dvě investiční možnosti, které označíme A, B .

Investice A nabízí zisk 1.2Kč za jednu investovanou korunu

z investice B získáme pouze 1.1Kč z jedné investované koruny.

V případě bez neurčitosti je naše rozhodnutí jasné, investujeme do A .

Uvažujme nyní, že zisk 10% z investice B je jistý

Zisk 20% z investice A je pouze v průměru.

Tak např. získáme 0 Kč s pravděpodobností 4/5 a velký zisk 6 Kč s pravděpodobností pouze 1/5.

Střední hodnota zisku z investice A je opět 20%.

Pravděpodobně ztrátu veškerého vloženého kapitálu do nejistého zisku z investice A bychom neriskovali.

Lepší je vrabec v hrsti, nežli holub na střeše.

Příklad 2.: St. Peterburgský paradox - hazardní hra

Hráč zaplatí x jednotek, aby se mohl účastnit následující hazardní hry.

Jsou prováděny následné vrhy mincí a hráč vyhraje 2^k jednotek, padne-li mu za sebou k -krát panna před tím, než mu poprvé padne lev.

Uvažujte nejprve bez jakýchkoli výpočtů, kolik byste byli ochotni zaplatit, abyste mohli sehrát tuto hazardní hru.

Padne-li poprvé lev, hra končí, hráč vyhraje $2^0 = 1$ Kč a to se stane s pravděpodobností 1/2.

Střední hodnota užítku pro Peterburgský paradox

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} (\ln(2^i) + 1) \doteq 1.7. \quad \text{při } \alpha = 1. \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} (10 \ln(2^i) + 1) \doteq 8. \quad \text{při } \alpha = 10$$

Příklad 3.: Nulnost získávání informací při sekvencním rozhodování.

Systém se stavovou rovnici

$$x_1(t+1) = u(t) + v(t)$$

$$x_2(t+1) = x_1(t) + u(t)$$

kde $v(t)$ je náhodná posloupnost nabývající hodnot ± 1 , obě s pravděpodobností 0.5.

Hledáme řízení $u(0)$ a $u(1)$, aby střední hodnota $\mathcal{E}\{|x_2(2)|\}$ byla minimální.

Spočítáme střední hodnotu jednorázovým výpočtem

$$\mathcal{E}\{|x_2(2)|\} = \mathcal{E}\{|x_1(1) + u(1)|\} = \mathcal{E}\{|u(0) + v(0) + u(1)|\} = 0.5u(0) + u(1) + 1 + 0.5u(0) + u(1) - 1$$

Zjevně platí

$$\min_{u(0), u(1)} \mathcal{E}\{|x_2(2)|\} = 1 \quad \text{pro } u(0) + u(1) \in [-1; +1].$$

Nakreslete průběh funkce $0.5|\alpha + 1| + 0.5|\alpha - 1|$ kde $\alpha = u(0) + u(1)$.

Pokud budeme řídit zpětnovazebně, to znamená získávat informaci během procesu, pak při znalosti $x_1(1)$ bude

$$\min_{u(0), u(1)} \mathcal{E}\{|x_2(2)|\} = \min\{|x_1(1) + u(1)|\} = 0. \quad \text{pro } u(1) = -x(1)$$

Padne-li poprvé panna a pak lev vyhraje 2^1 Kč a to se stane s pravděpodobností 1/4.

Padne-li dvakrát za sebou panna a pak lev, vyhraje $2^2 = 4$ Kč a to se stane s pravděpodobností 1/8.

Podobně vyhraje $x_i = 2^i$ Kč padne-li i -krát za sebou panna a pak lev, což se stane s pravděpodobností $p_i = 1/(2^{i+1})$.

Střední hodnota výhry je

$$m = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p_i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{2^{i+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty$$

Riziko ztráty je zde velké a to bereme v reálné situaci v úvahu.

Užitek: Funkce užítku peněz není lineární

Bernoulli: Přírůstek užítku peněz $\Delta u(a)$ při zvětšení částky z a na $a + \Delta a$ je nepřímo úměrný částce a .

Užitek z každé získané peněžní jednotky je tím menší, čím je příjemce této částky bohatší.

$$\frac{\Delta u(a)}{\Delta a} = \alpha \frac{1}{a}, \quad \alpha > 0$$

neboli

$$\frac{du}{da} = \frac{\alpha}{a} \implies du = \frac{da}{a} \alpha \implies u(a) = \alpha \ln a + c$$

Pokud předpokládáme, že užitek z jednotkové částky je jednotkový $u(1) = 1$, pak $c = 1$.

Pro $\alpha = 1$ je $u(a) = 2$ pro $a = e \doteq 2.7$, $u(a) = 3$ pro $a = e^2$.

Teorie empirických pokusů

Neznámé veličiny můžeme aproximovat experimenty.

Jedná se v podstatě o učení na základě pokusů.

Výsledky, které dostaneme nejsou přesné, jsou pouze přibližné a platí pouze s určitou pravděpodobností.

Jsou pouze **pravděpodobně přibližně správné (Probably Approximately Correct - PAC)**.

Chybu můžeme učinit libovolně malou, ale nikdy ne nulovou.

Také pravděpodobnost, že chyba nepřestoupí určitou hodnotu, můžeme udělat hodně vysokou (blíží se jedné), ale nikdy nezaručíme jistotu.

Příklad: Házení mincí

Naším problémem je určit, jaká je pravděpodobnost, že padne určitá strana mince

Označme jako p pravděpodobnost, že při hodu mincí padne "lev".

Protože neexistuje žádný způsob, jak tuto pravděpodobnost vypočítat - to je zjistit, zda daná mince je skutečně symetrická (pak bude $p = 0.5$), budeme tuto pravděpodobnost zjišťovat experimentálně.

Místo pravděpodobnosti p určíme empirickou pravděpodobnost $\hat{p}$

$$\hat{p} = \frac{l}{m} = \frac{\text{počet úspěšných pokusů}}{\text{počet všech pokusů}}$$

Empirická střední hodnota se s rostoucím počtem pokusů blíží skutečné pravděpodobnosti.

V jakém smyslu se empirická pravděpodobnost $\hat{p}_m$, závisající na počtu pokusů m , blíží p .

Ohodnotíme příznivý pokus číslem 1 a nepříznivý pokus číslem 0, pak $\hat{p}_m$ je náhodná proměnná, v intervalu $[0, 1]$.

Empirická pravděpodobnost $\hat{p}_m$ je náhodné číslo a při opakování pokusu nám nevychází $\hat{p}_m$ stejně jako dříve.

LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ - ÚVOD

Charakteristika problému LP

- **Systémy (matematické modely)** jsou popsány soustavou lineárních rovnic a nerovnic
- **Kritérium optimalizace** těchto systémů je také lineární
- **Proměnné** v těchto systémech leží v určitých mezích

Typické problémy vedoucí na LP

Optimální výrobní program

Vyrábíme n různých výrobků a každý požaduje m různých zdrojů (surovin)

Na výrobu jednoho výrobku j -tého druhu potřebujeme a_{ij} jednotek i -tého zdroje.

Zdroje jsou omezené a máme k dispozici b_i jednotek i -tého zdroje.

Zisk při výrobě jednoho výrobku j -tého typu je c_j . Počty výrobků j -tého typu označíme x_j .

Problémem je vyrábět s maximálním ziskem, při respektování omezení zdrojů

$$\max \{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\}.$$

kde x - vektor počtu výrobků, c - vektor zisků,

b - vektor omezení zdrojů, A je matice spotřeby s prvky a_{ij} .

Zvolíme si přesnost ε s jakou chceme určit neznámou pravděpodobnost p .

Jaká je pravděpodobnost, že náš experiment bude generovat španý vzorek (to je platí $|\hat{p}_m - p| \geq \varepsilon$).

Chceme, aby tato pravděpodobnost byla hodně malá.

Platí tzv. **Černoffova mez**

$$P\{|\hat{p}_m - p| \geq \varepsilon\} \leq 2e^{-2m\varepsilon^2}, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1]$$

Označíme tuto pravděpodobnost jako nejistotu $\delta = P\{|\hat{p}_m - p| \geq \varepsilon\}$.

Pak $(1 - \delta)$ se nazývá jistota a udává se v [%].

Z Černoffovy meze plyne důležitá tvrzení:

Abychom zajistili zvolenou přesnost ε při zvolené jistotě $(1 - \delta)$ musíme udělat m pokusů, kde

$$m \geq \frac{1}{2\varepsilon^2} \ln\left(\frac{2}{\delta}\right)$$

ε	0.1	0.05	0.03	0.02	0.01	0.1	0.01	0.001
δ	$2 \cdot 10^{-9}$	0.01	0.01	0.01	0.01	0.271	0.271	0.271
m	1000	1060	2.944	6.623	26.500	100	10.000	10^6

Lineární model má některé nepříjemné a z praktického hlediska neudržitelné důsledky.

Z algoritmu řešení (simplexového algoritmu) plyne, že při optimálním výrobním programu má podnik vyrábět alespoň tolik výrobků, kolik má úzkoprofilových zdrojů (to jsou ty zdroje, které úplně využije).

To ale znamená, že nasane-li omezení dalšího zdroje, měli bychom na to reagovat rozšířením sortimentu výroby o jeden výrobek, nebo nevyužitím dalšího zdroje. Intuitivně ale čekáme, že na snížení zdrojů bychom měli reagovat úplně opačně - zúžit sortiment a naopak plně využívat zdroje.

Směšovací problém

Máme n základních surovin.

Úkolem je namíchat základní suroviny tak, aby výsledný výrobek měl předepsané složení a surovinové náklady byly minimální.

Množství jednotek suroviny j -tého typu označíme x_j .

Její cena za jednotku je c_j .

Požadované složení výsledného produktu je popsáno vektorem b , jehož složky b_i jsou rovny požadovanému obsahu látky i ve výsledném produktu.

Jednotkově množství základní suroviny j -tého typu obsahuje a_{ij} jednotek látky typu i .

$$\min \{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$$

kde matice A má prvky a_{ij} .

Podobný je problém volby neekonomičtější diety.

Dopravní problém

Máme m výrobců a n spotřebitelů.
 i -tý výrobce vyrábí a_i jednotek zboží
 j -tý spotřebitel potřebuje b_j jednotek zboží.
Veličina c_{ij} je rovna nákladům na přepravu jednotky zboží od i -tého výrobce k j -tému spotřebiteli.
Proměnná x_{ij} je rovna množství jednotek zboží od i -tého výrobce k j -tému spotřebiteli. Chceme rozvést zboží od výrobců ke spotřebitelům s minimálními náklady

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} : \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, x_{ij} \geq 0, \sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j \right\}$$

Distribuční problém

Zde se jedná o matematický model problému optimálního rozpisu výroby na stroje či jiná zařízení.
Pro každý z m strojů máme určit, kolik výrobků typu 1 až n se na něm bude vyrábět.
Přitom jsou známy počty hodin a_i , $1 \leq i \leq m$, které jsou k dispozici na jednotlivých strojích
dáno požadované množství výrobků b_j , $1 \leq j \leq n$, typu j .
Konstanty c_{ij} jsou náklady na hodinovou práci i -tého stroje při výrobě j -tého výrobku.
 k_{ij} je hodinový výkon i -tého stroje při výrobě j -tého výrobku
proměnné x_{ij} jsou počty hodin i -tého stroje, po které bude stroj vyrábět j -tý výrobek.
Tento problém je speciální úloha lineárního programování

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} : \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \sum_{i=1}^m k_{ij} x_{ij} = b_j, x_{ij} \geq 0, \right\}$$

Normální úloha LP

- úloha na maximum
- omezení ve tvaru $Ax \leq b$,
- nezáporné pravé strany omezení ($b \geq 0$)

Grafické řešení lineárních modelů

Řešení v rovině, proto problém s pouze dvěma proměnnými.
Množina X , určená lineárními omezeními ve tvaru $X = \{x | Ax \leq b\}$ je konvexní množina.
Lineární funkcionál definovaný na konvexní množině má optimum na hranici množiny.

Příklad: Lineární problém

$$\max \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 : \\ x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_2 - x_1 \leq 3 \end{cases} \cdot x_1, x_2 \geq 0$$

Ekvivalentní formy lineárních úloh

Základní úloha

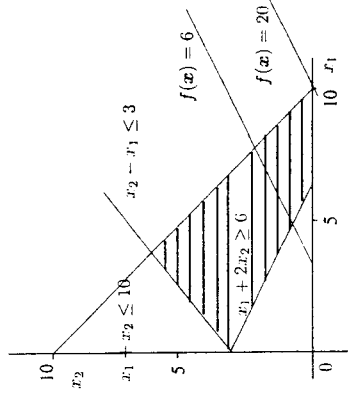
- $\max \{c^T x : A_1 x \leq b_1, A_2 x = b_2, A_3 x \geq b_3, x \geq 0\}$
- úloha na maximum či minimum
- omezení jsou ve tvaru rovnosti i nerovnosti obou typů
- proměnné jsou nezáporné

Standardní úloha

- $\max \{c^T x : A_1 x \leq b_1, A_2 x \leq b_2, -A_3 x \leq -b_3, -A_3 x \leq -b_3, x \geq 0\}$
- úloha na maximum
- omezení ve tvaru nerovností jednoho typu
- proměnné jsou nezáporné

Kanonický tvar

- $\max \{c^T x : A_1 x + u = b_1, A_2 x = b_2, A_3 x - v = b_3, x \geq 0, u \geq 0, v \geq 0\}$
- úloha na maximum
- omezení ve tvaru rovností
- proměnné jsou nezáporné



Obrázek 1: Grafické řešení příkladu

Řešením naší úlohy je $\max(J) = 20$, které nastává pro $x_1 = 10$ a $x_2 = 0$. Zřejmě také platí že $\min(J) = -12.5$, které nastává pro $x_1 = 3.5$ a $x_2 = 6.5$.

Dualní úloha $\min \{ \lambda^T b : A^T \lambda \geq c, \lambda \geq 0 \}$ (k předchozí primární úloze $\max \{ c^T x : Ax \leq b, x \geq 0 \}$)

$$\min \begin{cases} 6\lambda_1 + 3\lambda_2 + 10\lambda_3 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \geq 2 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geq -3 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

Protože v primární úloze se první omezení neuplatní, můžeme první dualní proměnnou vynechat (bude rovna nule) a dualní úlohu řešit také pouze v rovině dvou dualních proměnných.

Řešení dualní úlohy je stejné jako úlohy primární

$$\min \{ 6\lambda_1 + 3\lambda_2 + 10\lambda_3 \} = 20, \text{ které nastává pro } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0 \text{ a } \lambda_3 = 2.$$

Ani druhé omezení primární úlohy se neuplatnilo.

Stínová cena třetího omezení je rovna hodnotě třetí dualní proměnné. Zvětšíme-li pravou stranu omezení o jedna (z 10 na 11), pak optimální hodnota kritéria vzroste z 20 na 22.

Protože řešíme úlohu na maximum, pak derivace kritéria vzhledem k omezením je rovna $+\lambda^T$.

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{je-li rozhodnutí ANO} \\ 0 & \text{je-li rozhodnutí NE} \end{cases}$$

Protože se staví maximálně jeden obchodní dům, pak $x_3 + x_4 \leq 1$

Protože se staví obchodní dům pouze tam, kde je továrna, pak

$$x_3 = 0 \text{ if } x_1 = 0 \text{ a } x_4 = 0 \text{ if } x_2 = 0, \text{ proto } x_3 \leq x_1; \quad x_4 \leq x_2$$

Problém

$$\max \begin{cases} f(x) = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 : \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ x_3 + x_4 \leq 1 \\ -x_1 + x_3 \leq 0 \\ -x_2 + x_4 \leq 0 \\ x_i \text{ binární} \end{cases}$$

Protože může nastat pouze 16 možností, z nichž mnohé jsou nepřipustné, snadno zjistíme, že optimum je $f^*(x) = 14$ pro $x^* = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$.

Celočíselné programování (Integer Programming)

Speciální případy

- celočíselné lineární programování
- binární lineární programování

Příklad: Určitá společnost se rozhodla expandovat a vybudovat novou továrnu buď v LA nebo v SF, nebo v obou lokalitách.

Také chce vybudovat nanejvýš jeden obchodní dům, ale v té lokalitě, kde bude nová továrna.

K dispozici je kapitál \$10 mil.

Hledáme přípustnou kombinaci alternativ, která maximalizuje celkovou hodnotu díla.

Rozhodnutí	Co dělat	Rozhodovací proměnná	Hodnota díla	Celková investice
1	vybudovat tov. v LA	x_1	\$9mil.	\$6mil.
2	vybudovat tov. v SF	x_2	\$5mil.	\$3mil.
3	vybudovat obch. dům v LA	x_3	\$6mil.	\$5mil.
4	vybudovat obch. dům v SF	x_4	\$4mil.	\$2mil.

Příklad: Letecká společnost chce pokrýt své lety posádkami.

Má k dispozici tři posádky v SF. Může letět více než jedna posádka, placeny jsou ale všechny.

Let	Přípustná sekvence letů											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
SF → LA	1			1			1					
SF → DE		1			1			1				1
SF → SE			1			1			1			1
LA → CH				2			2		3	2		3
LA → SF	2					3				5	5	
CH → DE					3	3			4			
CH → SE							3	3		3	3	4
DE → SF		2	4	4					5			
DE → CH					2			2			2	
SE → SF			2				4	4				5
SE → LA						2			2	4	4	2
Celkové náklady	2	3	4	6	7	5	7	8	9	9	8	9

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{ANO = posádka je určena na urč. sekvenci letů} \\ 0 & \text{NE} \end{cases}, \quad j = 1, \dots, 12$$

Alespoň jedna posádka musí letět, tak na př. pro první let SF $\rightarrow$ LA platí $x_1 + x_4 + x_7 + x_{10} \geq 1$. Problém je tedy následující

$$\min \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + \dots + 9x_{12} : \\ x_1 + x_4 + x_7 + x_{10} \geq 1 & SF \rightarrow LA \\ x_2 + x_5 + x_8 + x_{11} \geq 1 & SF \rightarrow DE \\ \vdots \\ 11 \text{ omezení} \\ \sum_{j=1}^{12} x_j = 3 & x_j \text{ binární} \end{cases}$$

Optimální řešení je

$$x_3 = x_4 = x_{11} = 1$$

Celkové minimální náklady jsou \$18.000.

Před lety ušetřila společnost American Airlines \$18mil ročně použitím tohoto přístupu.

Rěšení celočíselného programování

Variant je konečný počet.

Pro binární proměnné je 2^n řešení - exponenciální růst

Standardní metoda je **metoda větví a mezí**

Můžeme problém řešit jako obyčejné LP (LP relaxation), pak vznikají problémy se zaokrouhlováním

- zaokrouhlené řešení nemusí být přípustné
- zaokrouhlené řešení nemusí být optimální

Příklad:

$$\max \begin{cases} x_2 : & -x_1 + x_2 \leq 1/2, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1 \text{ celočíselné} \\ & x_1 + x_2 \leq 3.5 \end{cases}$$

Optimální neceločíslné řešení je $x^* = [3/2; 2]^T$.

zaokrouhlené řešení $x = [2; 2]^T$ nebo $x = [1; 2]^T$ není přípustné.

Příklad:

$$\max \begin{cases} x_1 + 5x_2 : & x_1 + 10x_2 \leq 20, \quad x_1 \geq 0, \quad x_1 \text{ celočíselné} \\ & x_1 \leq 2 \end{cases}$$

Optimální neceločíslné řešení je $x^* = [2; 1.8]^T$.

Zaokrouhlené řešení není přípustné. optimum je zřejmě $x^* = [0; 2]^T$.

2

LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ

SIMPLEXOVÁ METODA

Jak zjistíme zda je to optimum? Dosadíme x_2 a x_3 do kritéria

$$f(x) = 39 + x_1 - 6x_4 + 1x_5 - 2x_6$$

Zvětšení proměnné x_1 a x_5 z nuly do kladných hodnot povede ke zvýšení kritéria.

Zvětšení x_1 o jednotku (při $x_4 = x_5 = x_6 = 0$) povede ke zmenšení x_2 o $3/2$ a zvětšení x_3 o $1/2$.

Všechny proměnné musí být nezáporné, proto maximální hodnota x_1 je $(x_1)_{\max} = 4$.

Potom ale je $x_2 = 0$ a $x_3 = 5$ a kritérium je rovno $f(x) = 39 + 4 = 43$.

Z rovnic omezení vyjádříme uvedené proměnné x_1 a x_3

$$x_1 = 4 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_6$$

$$x_3 = 5 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_6$$

Pro $x_2 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$ a $x_1 = 4$, $x_3 = 5$ je kritérium rovno $f(x) = 2 \cdot 4 + 7 \cdot 5 = 43$.

Po dosazení výrazů pro x_1 a x_3 do kritéria

$$f(x) = 43 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{14}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 - \frac{5}{3}x_6$$

Protože všechna znaménka koeficientů u x_2 , x_4 , x_5 a x_6 jsou záporná, je zřejmé, že při libovolné kladné hodnotě těchto koeficientů nastane pokles kritéria.

Proto $x_1 = 4$ a $x_3 = 5$ zajišťuje maximum kritéria, tedy $x^* = \begin{bmatrix} 4, & 0, & 5, & 0 \end{bmatrix}^T$.

Simplexová metoda pouze jednodušším způsobem kopíruje předchozí postup.

Předběžná analýza problému

Analýzujeme následující úlohu

$$\max \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 9x_4 : & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 9, \quad x_i \geq 0 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 \leq 24 \end{cases}$$

Pomocí přídavných proměnných x_5 a x_6 převedeme omezení na rovnice. Omezení mají tedy tvar

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9, \quad x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + x_6 = 24$$

Víme, že kritérium nejvíce závisí na koeficientu x_4

Z rovnic omezení plyne, že maximální hodnota koeficientu x_4 je $(x_4)_{\max} = 3$. Kritérium potom bude $f(x) = 27$

Předpokládejme, že optimum lze nalézt při kladných hodnotách x_2 a x_3 a nulových hodnotách ostatních.

Z rovnic omezení vyjádříme zvolené proměnné x_2 a x_3 jako funkce ostatních proměnných. Z rovnic omezení plyne

$$x_2 + x_3 = 9 - x_1 - x_4 - x_5$$

$$2x_2 + 4x_3 = 24 - x_1 - 8x_4 - x_6$$

Po Gaussově eliminaci

$$x_2 = 6 - \frac{1}{2}x_1 + 2x_4 - 2x_5 + \frac{1}{2}x_6$$

$$x_3 = 3 + \frac{1}{2}x_1 - 3x_4 + x_5 - \frac{1}{2}x_6$$

Pro $x_1 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$ je tedy $x_2 = 6$ a $x_3 = 3$. Kritérium je $f(x) = 39$.

Simplexová metoda

Základní verze simplexové metody řešení úlohy lineárního programování.

Problém

$$\max \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 9x_4 : & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 9, \quad x_i \geq 0 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 \leq 24 \end{cases}$$

Zavedením přídavných proměnných x_5 a x_6 převedeme omezení na rovnosti

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9,$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + x_6 = 24.$$

Simplexová tabulka:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
	1	1	1	1	0	0	9
	1	2	4	8	0	1	24
	-2	-3	-7	-9	0	0	0

Z prvního omezení $x_5 = 9 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$ a z druhého omezení $x_6 = 24 - (x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4)$.

Poslední řádek vyjadřuje kritérium $f(x) = 0 - (-2x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 9x_4 + 0x_5 + 0x_6)$.

Proměnné x_5 a x_6 jsou bázev proměnné.

Sloupcové vektory matice omezení jim odpovídající tvoří jednotkovou submatici.

Poté co jsme rozhodli (pomocí klíčového sloupce), která proměnná bude tvořit novou báзовou proměnnou, musíme zjistit, která proměnná z báze vypadne.

Z první rovnice omezení plyne, že pokud proměnná x_5 bude nulová, může být proměnná x_4 nejvýše rovna 9.

Z druhé rovnice omezení plyne, že pokud proměnná x_6 bude nulová, pak proměnná x_4 může být nejvýše rovna 3.

Toto omezení na volbu velikosti čtvrté proměnné je přísnější a proto jej musíme respektovat. Odtud plyne následující tvrzení:

Simplexové kritérium II.: *Nechť j je index klíčového sloupce. Pro všechna $a_{ij} > 0$ vypočítáme podíl: koeficientů b_i ve sloupci b a prvků a_{ij} v j -tém sloupci. Vypočítáme tedy podíl*

$$\frac{b_i}{a_{ij}} \quad \text{pro } \forall i, \quad \text{pro která } a_{ij} > 0.$$

*Nyť vyberu takové $i = k$, aby $\frac{b_k}{a_{kj}} = \min_i \frac{b_i}{a_{ij}}$. Prvek s indexem (k, j) je **klíčový prvek**. Znamená to, že proměnná k vstupuje do nové báze a příslušná báзовá proměnná odpovídající k -tému řádku z báze vypadne. Pokud pro všechna i platí $a_{ij} < 0$, pak úloha nemá konečné řešení.* □

Tabulka 1: SIMPLEXOVÁ TABULKA

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
1	1	1	1	1	0	9
1	2	4	8	0	1	24
-2	-3	-7	-9	0	0	0
7/8	3/4	1/2	0	1	-1/8	6
1/8	2/8	4/8	1	0	1/8	3
-7/8	-3/4	-2.5	0	0	9/8	27
3/4	1/2	0	-1	1	-1/4	3
1/4	1/2	1	2	0	1/4	6
-1/4	5/4	0	5	0	7/4	42
1	2/3	0	-4/3	4/3	-1/3	4
0	1/3	1	7/3	-1/3	1/3	5
0	17/12	0	14/3	1/3	5/3	43

Kritérium je upraveno tak, že koeficienty u báзовých proměnných jsou nulové. Potom v posledním sloupci (sloupec označený b) čteme jednak hodnoty báзовých proměnných a v posledním řádku velikost kritéria.

Některé koeficienty v posledním řádku jsou záporné a to značí, že pokud příslušné proměnné jim odpovídající budou nenulové, hodnota kritéria vzroste.

Proto najdeme minimální koeficient v posledním řádku (záporný koeficient s největší absolutní hodnotou). Sloupec jemu odpovídající se nazývá **klíčový sloupec**.

Můžeme tedy vyslovit následující tvrzení:

Simplexové kritérium I.: *Jestliže v posledním řádku simplexové tabulky jsou některé koeficienty u nebáзовých proměnných záporné, pak jako novou báзовou proměnnou vybereme tu proměnnou, která má záporný a v absolutní hodnotě maximální koeficient v posledním řádku. Pokud všechny koeficienty v posledním řádku jsou nulové nebo kladné, je získané řešení optimální.* □

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
1	1	1	1	1	0	9
1	2	4	8	0	1	24
-2	-3	-7	-9	0	0	0
7/8	3/4	1/2	0	1	-1/8	6
1/8	2/8	4/8	1	0	1/8	3
-7/8	-3/4	-2.5	0	0	9/8	27

První řádek popisuje omezení $x_5 = 6 - (x_1/7/8 + x_2/3/4 + x_3/1/2 + 0x_4 - x_6/1/8)$, z druhého řádku plyne $x_4 = 3 - (x_1/1/8 + x_2/2/8 + x_3/4/8 + 0x_5 + x_6/1/8)$.

Poslední řádek je kritérium $f(x) = x_1/7/8 - x_2/3/4 - 2.5x_3 + 0x_4 + 0x_5 + x_6/9/8 = 27$.

Dualní úloha $\min \{b^T \lambda : A^T \lambda \geq c, \lambda \geq 0\}$ je v našem případě

$$\min \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 \geq 2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 3 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 \geq 7 \\ \lambda_1 + 8\lambda_2 \geq 9 \end{cases} \cdot \lambda_i \geq 0$$

Dualní řešení čteme v posledním řádku simplexové tabulky ve sloupcích odpovídajících přidávaným proměnným (zde proměnná x_5 a x_6). Dualní řešení je $\lambda_1^* = 1/3, \lambda_2^* = 5/3$.

Vlastnosti množiny přípustných a optimálních řešení

Omezení: $Ax = b$, $x \geq 0$, kde A je (m, n) , b je $(m, 1)$ a x je $(n, 1)$, kde $m \leq n$.

Vektor x , který splňuje omezení je **přípustné řešení**. Množina přípustných řešení $x \in X$.

Přípustné řešení, které maximalizuje kritérium $c^T x$ je **optimální řešení**. Množina optimálních řešení X_{opt} .

Vlastnosti množiny přípustných řešení X . Označíme

$$A = \begin{bmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} & \dots & a^{(n)} \end{bmatrix}$$

Protože je m omezení, jsou vektory $a^{(i)}$ rozměru m . Omezení

$$x_1 a^{(1)} + x_2 a^{(2)} + \dots + x_n a^{(n)} = b$$

Řešení, mající nejvýše m kladných složek x_i vektoru x , se nazývá **základní řešení** (právě m - nedegenerované).

Vektory $a^{(i)}$, které mají v lineární kombinaci kladné koeficienty se nazývají **základní**, je-li jich m tvoří **bázi**.

Věta: Bod $x \in X$ je **základním řešením pouze tehdy, je-li krajním bodem množiny X** .

Předchozím tvrzením je vlastně určen algoritmus výpočtu krajních bodů množiny X .

Důkaz - krajní bod množiny nelze vyjádřit jako konvexní kombinaci jiných dvou různých bodů množiny X .

Je-li možno vyjádřit libovolný bod konvexní množiny jako konvexní kombinaci jejích krajních bodů, pak se taková množina nazývá **konvexní polyedr**.

$$x = \sum_{i=1}^r k_i x^{(i)}, \quad \sum_{i=1}^r k_i = 1, \quad k_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad x^{(i)} \text{ jsou všechny krajní body množiny } X$$

Věta: Nechť x je základním řešením, které má prvních $k \leq m$ složek kladných a ostatní nulové. Dále nechť

$$a^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix}^T$$

$$a^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix}^T$$

$$\dots$$

$$a^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & \dots \end{bmatrix}^T$$

a dále platí $a^{(k+1)} \leq 0$. Potom reprezentant krajního paprsku množiny X příslušný k základnímu řešení (krajnímu bodu) x je roven

$$y = \begin{bmatrix} -a_1^{(k+1)} & -a_2^{(k+1)} & \dots & -a_k^{(k+1)} & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

Snadno dokážeme, že pro každé $\alpha \geq 0$ platí $x + \alpha y \in X$. Po dosazení za y platí

$$A(x + \alpha y) = a^{(1)}(x_1 - \alpha a_1^{(k+1)}) + \dots + a^{(k)}(x_k - \alpha a_k^{(k+1)}) + \alpha a^{(k+1)} = b.$$

Platí totiž

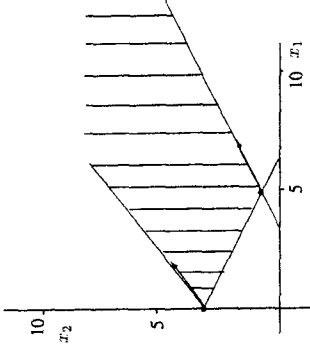
$$a^{(1)}x_1 + \dots + a^{(k)}x_k = b$$

neboť x je základním řešením. Dále platí

$$a^{(1)}\alpha a_1^{(k+1)} + \dots + a^{(k)}\alpha a_k^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \alpha a_1^{(k+1)} & 0 & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix}^T \text{ a podobně pro } a^{(i)}\alpha a_i^{(k+1)}, \quad i = 2, \dots, k. \text{ Proto je nulový následující součet členů}$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha a_1^{(k+1)} & -\alpha a_2^{(k+1)} & \dots & -\alpha a_k^{(k+1)} & \dots \end{bmatrix} + \alpha a^{(k+1)} = 0$$

Přitom $x + \alpha y \geq 0$.



Neomezenou konvexní polyedrickou množinu charakterizujeme ještě **krajními paprsky**.

Nenulový vektor $y \in X$ se nazývá **reprezentant krajního paprsku** množiny X jestliže platí, že

a) existuje krajní bod $x^{(i)} \in X$ takový, že $x^{(i)} + \alpha y \in X$ pro všechna $\alpha \geq 0$.

b) vektor y se nedá vyjádřit jako lineární kombinace, s kladnými koeficienty, jiných dvou krajních paprsků, lineárně nezávislých na y .

Každý bod konvexní polyedrické množiny X je možno vyjádřit ve tvaru

$$x = \sum_{i=1}^r k_i x^{(i)} + \sum_{j=1}^s \alpha_j y^{(j)}, \quad \sum_{i=1}^r k_i = 1, \quad k_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad \alpha_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, s.$$

Předchozí tvrzení je pouze postačující podmínkou pro reprezentanta krajního paprsku.

Abychom získali všechny krajní paprsky musíme ke všem základním řešením s jednotkovými bazickými vektory nalézt všechny sloupce $a^{(j)} \leq 0$ a z nich vytvořit (lineárně nezávislé) reprezentanty krajních paprsků podle předchozích zásad.

Množina všech přípustných řešení je konvexní polyedrická množina.

Také množina všech optimálních řešení X_{opt} je konvexní polyedrická množina.

Přitom platí, že každý krajní bod množiny X_{opt} je i krajním bodem množiny X a každý krajní paprsek množiny X_{opt} je i krajním paprskem množiny X .

Tím jsme dostali jednoduchý návod k řešení úlohy lineárního programování: Nalezneme všechny krajní body a krajní paprsky množiny přípustných řešení X a v krajních bodech spočítáme hodnotu kritéria $c^T x$.

Příklad: Nalezněte krajní body a krajní paprsky množiny $\mathcal{X} = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1.5 & -1.5 \\ 3 & 2.5 & -2.2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Protože se jedná o dvě omezení, budeme vybrat z matice A vždy dva sloupce a ověřovat, zda tvoří základní řešení. Máme tedy pouze tři možnosti výběru. Označíme B_1 matici tvořenou prvním a druhým sloupcem matice A

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1.5 \\ 3 & 2.5 \end{bmatrix}, \quad (B_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix},$$

Násobíme-li soustavu $Ax = b$ inverzní maticí $(B_1)^{-1}$, budoum bazické vektory jednotkové a navíc přímo dostaneme základní řešení, to je krajní bod množiny přípustných řešení, který označíme $x^{(1)}$. Zde

$$(B_1)^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{a proto} \quad x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

První a druhá složka krajního vektoru $x^{(1)}$ je rovna složkám vektoru $(B_1)^{-1}b$, protože jsme za bazové vektory vybrali první dva sloupce matice A . Ostatní složky vektoru $x^{(1)}$ jsou nulové. Samozřejmě složky vektoru $(B_1)^{-1}b$ musí být nezáporné, aby krajní bod splňoval podmínku nezápornosti.

Příklad: Nalezněme krajní body a krajní paprsky množiny $\mathcal{X} = \{x : Ax = b\}$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1.5 & -1.5 \\ 3 & 2.5 & -2.3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Protože první dva sloupce matice A jsou stejné jako v předchozím příkladě, bude první krajní bod $x^{(1)}$ stejný. Množina přípustných řešení nemá další krajní bod.

Pro určení krajního paprsku vypočítáme vektor

$$(B_1)^{-1}a^{(3)} = \begin{bmatrix} -0.6 \\ -0.2 \end{bmatrix}.$$

Protože složky tohoto vektoru jsou nekladné, existuje krajní paprsek y , jehož první dvě složky jsou rovny záporně vzatým složkám vektoru $(B_1)^{-1}a^{(3)}$ a třetí složka krajního vektoru je rovna jedné (ostatní složky, kdyby existovaly, by byly nulové).

Proto reprezentant krajního paprsku je vektor $y = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}^T$. Množina přípustných řešení $\mathcal{X}$ je v tomto případě určena

$$\mathcal{X} = \left\{ x : x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.2 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha \geq 0 \right\}.$$

Nyní pro zjištění dalšího krajního bodu množiny $\mathcal{X}$ vybereme první a třetí sloupec matice A

$$B_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1.5 \\ 3 & -2.2 \end{bmatrix}, \quad (B_2)^{-1} = \begin{bmatrix} -22 & 15 \\ -30 & 20 \end{bmatrix}, \quad (B_2)^{-1}b = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Proto druhý krajní bod množiny $\mathcal{X}$ je $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 10 \end{bmatrix}^T$.

Nyní vybereme poslední možnou kombinaci sloupců matice A a sice její druhý a třetí sloupec

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1.5 & -1.5 \\ 2.5 & -2.2 \end{bmatrix}, \quad (B_3)^{-1} = \begin{bmatrix} -4.9 & 3.33 \\ -5.55 & 3.33 \end{bmatrix}, \quad (B_3)^{-1}b = \begin{bmatrix} 2.22 \\ -1.11 \end{bmatrix}.$$

Protože některé prvky matice $(B_3)^{-1}b$ jsou záporné, netvoří druhý a třetí sloupec matice A bázi.

Pro výpočet krajních paprsků vypočítáme vektory

$$(B_1)^{-1}a^{(3)} = \begin{bmatrix} -0.9 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad (B_2)^{-1}a^{(2)} = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

kde $a^{(3)}$ je třetí sloupec matice A . to je ten, který není v matici B_1 a obdobně $a^{(2)}$ je druhý sloupec matice A , to je opět ten, který není v matici B_2 .

Protože všechny prvky v obou vektorech nejsou nekladné, neexistuje krajní paprsek dané množiny $\mathcal{X}$.

Množina $\mathcal{X}$ je tedy určena

$$\mathcal{X} = \left\{ x : x = k_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T + k_2 \begin{bmatrix} 10 & 0 & 10 \end{bmatrix}^T : k_1 + k_2 = 1, k_1 \geq 0, k_2 \geq 0 \right\}.$$

Maticový zápis simplexové metody

Odvodíme metodu nalezení primární i duální úlohy lineárního programování.

Primární úloha - standardní úloha lineárního programování

$$\max \{ f(x) = c^T x : Ax \leq b, x \geq 0 \}$$

Její kanonický tvar

$$\max \{ f(x) = c^T x : Ax + Iu = b, x \geq 0, u \geq 0 \}$$

Základní řešení

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + Iu_1 &= b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + Iu_2 &= b_2 \\ f(x) - c_1^T x_1 - c_2^T x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{kde } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Bázické proměnné jsou u_1, u_2 a přípustné řešení je $u_1 = b_1, u_2 = b_2, x_1 = 0, x_2 = 0$, kritérium $f(x) = 0$.

Nechť nové bazické proměnné jsou x_2, u_2 , místo bazové proměnné u_1 zavádíme novou bazovou proměnnou x_2 . Z první rovnice omezení plyne

$$x_2 = A_{12}^{-1}(b_1 - Iu_1 - A_{11}x_1).$$

Rovnice omezení upravíme

$$\begin{bmatrix} A_{11} & I \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ u_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{12} & 0 \\ A_{22} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Zavedeme matici B nových bázeických vektorů

$$B = \begin{bmatrix} A_{12} & 0 \\ A_{22} & I \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} A_{12}^{-1} & 0 \\ -A_{22}A_{12}^{-1} & I \end{bmatrix}$$

Násobíme-li předchozí soustavu zleva maticí B^{-1} dostaneme

$$\begin{bmatrix} A_{12}^{-1} & 0 \\ -A_{22}A_{12}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & I \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ u_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12}^{-1}b_1 \\ -A_{22}A_{12}^{-1}b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

Rovnice pro kritérium

$$f(x) - c_1^T x_1 - c_2^T [A_{12}^{-1}(b_1 - Iu_1 - A_{11}x_1)] = 0$$

po úpravě

$$f(x) - (c_1^T - c_2^T A_{12}^{-1} A_{11}) x_1 + (c_2^T A_{12}^{-1}) u_1 = c_2^T A_{12}^{-1} b_1$$

Společný zápis

$$\begin{aligned} & A_{12}^{-1} A_{11} x_1 + A_{12}^{-1} u_1 + I x_2 + 0 u_2 = A_{12}^{-1} b_1 \\ & (-A_{22} A_{12}^{-1} A_{11} + A_{21}) x_1 - A_{22} A_{12}^{-1} u_1 + 0 x_2 + I u_2 = b_2 - A_{22} A_{12}^{-1} b_1 \\ & f(x) + (-c_1^T + c_2^T A_{12}^{-1} A_{11}) x_1 + c_2^T A_{12}^{-1} u_1 = c_2^T A_{12}^{-1} b_1 \end{aligned}$$

Dualní úlohu $\min\{b^T \lambda : A^T \lambda \geq c, \lambda \geq 0\}$ upravíme do kanonického tvaru

$$-\max\{f(\lambda) = -b^T \lambda : -A^T \lambda + Iv = -c, \lambda \geq 0, v \geq 0\}$$

Základní řešení opět zapíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} -A_{11}^T \lambda_1 - A_{21}^T \lambda_2 + Iv_1 &= -c_1 \\ -A_{12}^T \lambda_1 - A_{22}^T \lambda_2 + Iv_2 &= -c_2 \\ -f(\lambda) + b_1^T \lambda_1 + b_2^T \lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

Bázeické proměnné jsou v_1, v_2 , přípustné řešení je $v_1 = -c_1, v_2 = -c_2, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ a kritérium je $f(\lambda) = 0$.

Nechť nové bázeické proměnné jsou λ_1, v_1 , místo bázeové proměnné v_2 zavádíme novou bázeovou proměnnou λ_1 .

Z druhé rovnice omezení plyne

$$\lambda_1 = (A_{12}^T)^{-1} (c_2 + Iv_2 - A_{22}^T \lambda_2)$$

Rovnice omezení upravíme do tvaru

$$\begin{bmatrix} -A_{21}^T & 0 \\ -A_{22}^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A_{11}^T & I \\ -A_{12}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 \\ -c_2 \end{bmatrix}$$

Zavedeme matici nových bázeických vektorů, kterou označíme $\bar{B}$. Platí

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} -A_{21}^T & I \\ -A_{12}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -(A_{12}^T)^{-1} \\ I & -A_{11}^T (A_{12}^T)^{-1} \end{bmatrix}$$

Bázeové proměnné jsou nyní x_2 a u_2 . Přípustné řešení

$$\begin{aligned} x_2^* &= A_{12}^{-1} b_1 \geq 0 \\ u_2^* &= b_2 - A_{22} A_{12}^{-1} b_1 \geq 0 \\ x_1^* &= 0, \quad u_1^* = 0 \\ f(x^*) &= c_2^T A_{12}^{-1} b_1 \end{aligned}$$

je optimální řešení, pokud jsou nezáporné koeficienty v posledním řádku (v kritériu), čili

$$\begin{aligned} -c_1^T + c_2^T A_{12}^{-1} A_{11} &\geq 0 \\ c_2^T A_{12}^{-1} &\geq 0 \end{aligned}$$

Poslední řádek simplexové tabulky je roven

$$f(x) + v_1^T x_1 + v_2^T x_2 + \lambda_1^T u_1 + \lambda_2^T u_2 = f^*(x)$$

kde $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ je řešení dualní úlohy. Platí $\lambda_1^T = c_2^T A_{12}^{-1}$, $\lambda_2^T = 0$, neboli

$$\lambda_1 = (A_{12}^T)^{-1} c_2, \quad \lambda_2 = 0$$

Předchozí tvrzení prokážeme, budeme-li stejným postupem řešit dualní úlohu lineárního programování.

Předchozí soustavu násobíme zleva maticí $\bar{B}^{-1}$. Po úpravě

$$\begin{aligned} & (A_{11}^T A_{12}^{-T} A_{22} - A_{12}^T) \lambda_2 - A_{12}^T v_2 + I \lambda_1 + 0 v_1 = A_{12}^{-T} c_2 \\ & (A_{11}^T A_{12}^{-T} A_{22} - A_{12}^T) \lambda_2 - A_{11}^T A_{12}^{-T} v_2 + 0 \lambda_1 + I v_1 = -c_1 + A_{11}^T A_{12}^{-T} c_2 \\ & -f(x) + (b_2^T - b_1^T A_{12}^{-T} A_{22}^T) \lambda_2 + b_1^T A_{12}^{-T} v_2 = -b_1^T A_{12}^{-T} c_2 \end{aligned}$$

Přípustné řešení dualní úlohy

$$\begin{aligned} \lambda_1^* &= A_{12}^{-T} c_2 \geq 0 \\ v_1^* &= -c_1 + A_{11}^T A_{12}^{-T} c_2 \geq 0 \\ \lambda_2^* &= 0, \quad v_2^* = 0 \\ f(\lambda^*) &= b_1^T A_{12}^{-T} c_2 = c_2^T A_{12}^{-1} b_1 \end{aligned}$$

je optimální řešení, pokud jsou nezáporné koeficienty v posledním řádku (v kritériu)

$$\begin{aligned} b_2 - A_{22} A_{12}^{-1} b_1 &\geq 0 \\ A_{12}^{-1} b_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Řešením primární úlohy (ve tvaru zde uvedeném) dostaneme tedy nejen primární, ale i dualní řešení.

Speciální případy

U většiny praktických příkladů je počet iterací simplexového algoritmu roven $(1.5 až 3)m$, kde m je počet omezení. Uvedena byla simplexová metoda pro normální úlohu (koeficienty $b_i > 0$) s omezením ve tvaru nerovnosti. Alternativní optimální řešení

Pokud v posledním řádku (který reprezentuje kritérium) jsou všechny koeficienty nezáporné, ale některé jsou nulové i u nezáporných proměnných, existují **alternativní optimální řešení**.

Jedno alternativní optimální řešení najdeme obvyklým postupem a označíme jej x_1^* (to je jeden krajní bod množiny optimálních řešení).

Je-li v posledním řádku nula u j -té nezáporné proměnné, pak ji známým způsobem zahrneme do báze a získáme jiné optimální řešení x_2^* .

To provedeme pro všechny sloupce j , u kterých je nula u nezáporných proměnných.

Tím získáme všechny krajní body x_i^* množiny optimálních řešení. Jejich konvexní kombinace určuje množinu optimálních alternativních řešení

$$x^* = \sum_{i=1}^n k_i x_i^*, \quad \sum_{i=1}^n k_i = 1, \quad k_i \geq 0.$$

Příklad: Řešte úlohu LP

$$\max \{ 2x_1 + 4x_2 : x_1 + x_2 \leq 4, x_1 + 2x_2 \leq 6, x_1 \geq 0 \}$$

Neomezená řešení

Je-li některý koeficient v posledním řádku simplexové tabulky záporný, pak jeho zvětšení (z nuly na nenulovou hodnotu) povede ke zvětšení kritéria.

Pokud v jemu odpovídajícím sloupci jsou všechny koeficienty $a_{i,j}$ záporné, můžeme odpovídající proměnnou zvětšovat nade všechny meze.

Kritérium neomezeně roste a přitom jsou všechna omezení splněna.

Příklad :

$$\max \{ x_1 + 3x_2 : -2x_1 + x_2 \leq 4; x_1 \geq 0 \}$$

Zavedeme jednu přídanou proměnnou y a sestavíme simplexovou tabulku

x_1	x_2	y	b
-2	1	1	4
-1	-3	0	0

V posledním řádku simplexové tabulky je záporný prvek (-7) ve sloupci odpovídajícím proměnné x_1 .

Protože všechny prvky v příslušném sloupci jsou záporné (zde pouze jeden prvek -2) je zřejmé, že proměnná x_1 může růst nade všechny meze.

Řešení této úlohy není tedy omezené.

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	1	1	0	4
1	2	0	1	6
-2	-4	0	0	0
0.5	0	1	-0.5	1
0.5	1	0	0.5	3
0	0	0	2	12

Jedno řešení je $x_1^* = [0, 3]^T$.

Protože v simplexové tabulce existuje v posledním řádku nulový prvek i u nezáporné proměnné, zahrneme příslušnou proměnnou do báze a určíme druhé řešení $x_2^* = [2, 2]^T$.

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	2	-1	2
0	1	-1	1	2
0	0	0	2	12

Množina optimálních řešení $x^* = \lambda x_1^* + (1 - \lambda)x_2^* = [(1 - \lambda)2 : 3\lambda + 2(1 - \lambda)]^T ; \lambda \in (0; 1)$

Jiná omezení a jejich převod na kanonický tvar

Pokud jsou omezení v úloze lineárního programování ve tvaru $Ax \leq b$, kde $b \geq 0$, pak zavedením přídané proměnné $y \geq 0$ upravíme omezení do tvaru $Ax + y = b$.

Protože se přídaná proměnná y nevyskytuje v kritériu, pak získáme přímo základní řešení ve tvaru $y = b$.

Pokud jsou některá omezení ve tvaru $Ax = b$, případně neplatí, že $b \geq 0$, nelze nalézt přímo základní řešení.

Nelze-li nalézt přímo základní řešení, upravíme omezení do tvaru $Ax = b$, kde $b \geq 0$. To vždy je možné.

Nyní uvažujeme **umělé problém**

$$\max \{ - \sum y_i : Ax + y = b, x \geq 0, y \geq 0 \}$$

kde y jsou umělé proměnné. Základní řešení pro tuto úlohu je zřejmé $y = b$.

Simplexovou metodou řešíme tuto úlohu. Přitom nejprve musíme z kritéria vyloučit proměnné y_i . To snadno uděláme, neboť platí $y_i = b_i - \sum_j a_{i,j}x_j$.

Řešení, pokud existuje, je zřejmě $\max f(\cdot) = 0$, pro $y = 0$. Přitom nalezneme základní bázi pro původní úlohu.

Je-li ve výsledku umělé úlohy některé y_i nenulové, pak původní úloha nemá řešení.

Řešení původní úlohy se tak rozpadá do dvou fází. V první fázi řešíme umělou úlohu zavedením umělé proměnné y a jiného kritéria. Pokud dostaneme řešení umělé úlohy $y = 0$, pokračujeme druhou fází, ve které vypustíme umělé proměnné y_i a vrátíme se k původnímu kritériu.

Příklad:

$$\max \{ -3x_1 - 2x_2 : x_1 + x_2 = 10; x_1 \geq 4; x_2 \geq 0 \}$$

Omezení upravíme

$$x_1 + x_2 = 10$$

$$x_1 - x_3 = 4, x_i \geq 0$$

Protože není zřejmé základní řešení, budeme řešit umělý problém

$$\max \{ -y_1 - y_2 : Ax + y = b; x \geq 0; y \geq 0, \}$$

kde matice A a vektor b plynou z předchozí soustavy. Simplexová tabulka pro umělý problém

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b
1	1	0	1	0	10
1	0	-1	0	1	4
0	0	0	1	1	0

Nyní musíme vynulovat koeficienty u proměnných y_i v kritériu (v posledním řádku předchozí tabulky).

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b
0	1	1	1	-1	6
1	0	-1	0	1	4
0	0	0	1	1	0

Z předchozí tabulky plyne konečné řešení umělé úlohy $y_1 = 0, y_2 = 0, x_1 = 4, x_2 = 6, x_3 = 0$. Hodnota kritéria je $f(\cdot) = 0$. Umělé proměnné jsou nulové, kritérium je nulové také, z čehož plyne, že původní úloha má řešení.

Nyní jsme dostali základní bázi $x_1 = 4, x_2 = 6, x_3 = 0$ pro naši původní úlohu.

Sestavíme novou simplexovou tabulku pro původní úlohu tak, že vypustíme z předchozí simplexové tabulky sloupce příslušející umělé zavedeným proměnným y_i a do posledního řádku simplexové tabulky napíšeme koeficienty původního kritéria (záporně vzaté).

x_1	x_2	x_3	b
0	1	1	6
1	0	-1	4
3	2	0	0

Dále je třeba vynulovat prvky v posledním řádku příslušejícím bázevým proměnným x_1 a x_2 .

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b
1	1	0	1	0	10
1	0	-1	0	1	4
-2	-1	1	0	0	-14

Odtud plyne základní řešení $x_1 = x_2 = x_3 = 0, y_1 = 10, y_2 = 4$. Kritérium je rovno -14. Řešení není optimální. Nová simplexová tabulka

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b
0	1	1	1	-1	6
1	0	-1	0	1	4
0	-1	-1	0	2	-6

Základní řešení je zřejmě $y_1 = 6, x_1 = 4$. Řešení $f(\cdot) = -6$ opět není optimální.

x_1	x_2	x_3	b
0	1	1	6
1	0	-1	4
0	0	1	-24

Protože v posledním řádku simplexové tabulky jsou nezáporné prvky, nalezi-li jsme konečné řešení naší původní úlohy. Řešení je zřejmě $x_1 = 4, x_2 = 6$ a optimální hodnota kritéria je $f(x) = -24$.

Dualita v LP

Mějme omezení

$$Ax \leq b \iff a_i^T x \leq b_i, \quad A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix}$$

Množina přípustných řešení $\mathcal{P} = \{x : Ax \leq b\}$ je prázdná, platí-li

$$\mathcal{P} = \emptyset \iff \exists \lambda_i \geq 0; \sum \lambda_i a_i = 0; \sum \lambda_i b_i < 0$$

Úprava

$$\sum \lambda_i a_i = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} = A^T \lambda = 0; \quad \sum \lambda_i b_i = \lambda^T b < 0$$

Předchozí tvrzení o množině přípustných řešení nejprve odvodíme a pak použijeme k odvození duality.

Omezení $a_i^T x \leq b_i$ násobíme $\lambda_i > 0$ a sečtené

$$a_i^T x \leq b_i \implies \sum \lambda_i a_i^T x \leq \sum \lambda_i b_i, \quad (\text{obrácená implikace neplatí})$$

Označíme $h = \sum \lambda_i a_i, \quad g = \sum \lambda_i b_i$, pak předchozí nerovnost je $h^T x \leq g$.

Stochastické lineární programování

LP s náhodným kritériem

Nechť c je náhodná proměnná se střední hodnotou $\mu_c = \bar{c}$ a kovariancí $\text{cov}(c) = \Sigma$.

Pak $\mathcal{E}(c^T x) = \bar{c}x$, $\text{var}(c^T x) = x^T \Sigma x$.

Kritérium je potom obvykle

$$f(x) = \mathcal{E}(c^T x) + \gamma \text{var}(c^T x)$$

kde vážíme i rozptyl (risk sensitive cost). Problém LP se změní na kvadratické programování (QP).

LP s náhodnými omezeními

Pokud jsou řádky a_i^T matice A náhodné, můžeme požadovat, aby každé omezení $a_i^T x \leq b$ platilo s pravděpodobností větší než γ . LP se změní na QP.

Příklad:

$$\min \left\{ \begin{matrix} x_1 + x_2 : & ax_1 + x_2 \geq 7 \\ & bx_1 + x_2 \geq 4 \end{matrix} \right. , \quad x_i \geq 0$$

Vektor (a, b) je náhodný vektor s rovnoměrným rozdělením na intervalu $< 1, 4 > \times < 1/3, 1 >$.

Hustota $p(a, b) = 1/2$ pro $1 \leq a \leq 4, 1/3 \leq b \leq 1$ a jinde $p(a, b) = 0$.

Zavedeme množinu

$$\mathcal{H} = \{x : h^T x \leq g\}, \quad \text{pak } \mathcal{P} \subseteq \mathcal{H}$$

Množina $\mathcal{H}$ není menší než množina $\mathcal{P}$. Aby množina $\mathcal{P}$ byla prázdná, uděláme množinu $\mathcal{H}$ prázdnou, proto

$$h = 0; \quad g < 0, \quad \text{čili } \sum \lambda_i a_i = A^T \lambda = 0, \quad \sum \lambda_i b_i = b^T \lambda < 0, \quad \lambda_i > 0$$

Mějme úlohu LP (bez omezení $x \geq 0$)

$$\max \{f(x) = c^T x : Ax \leq b\}$$

Optimální hodnota je $f^* = c^T x^*$.

Veličina t je horní mez pro f^* , jestliže množina $\mathcal{P} = \{x : Ax \leq b, \quad c^T x > t\}$ je prázdná.

Pak existuje $\mu_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, m$, že

$$\sum \mu_i a_i + (-\mu_0 c) = 0, \quad \sum \mu_i b_i + \mu_0(-t) < 0$$

Pokud $\mu_0 = 0$ pak $Ax \leq b$ je nepřipustné a t může být libovolné, pak $f^* = -\infty$.

Proto $\mu_0 > 0$. Zvedeme $\lambda_i = \frac{\mu_i}{\mu_0}$, pak

$$\sum \lambda_i a_i = c; \quad \sum \lambda_i b_i < t$$

To znamená, pokud $\lambda \geq 0, \quad A^T \lambda = c$, pak $\sum \lambda_i b_i = b^T \lambda \geq f^*$.

Hledáme nejmenší horní mez a proto

$$\min \{b^T \lambda : A^T \lambda = c, \quad \lambda \geq 0\}$$

což je duální problém k původnímu primárnímu problému: $\max \{f(x) = c^T x : Ax \leq b\}$.

Úlohu vyřešíme pro střední hodnoty proměnných $\mathcal{E}(a) = 5/2, \quad \mathcal{E}(b) = 2/3$.

Pro střední hodnoty parametrů je řešení

$$x^* = [18/11, 32/11], \quad \min \{x_1 + x_2 : \dots\} = 50/11 \approx 4.54$$

Vypočítáme s jakou pravděpodobností je x^* přípustné řešení

$$P_T = P_T \{ax_1^* + x_2^* \geq 7; \quad bx_1^* + x_2^* \geq 4\} = P_T \{a \geq 5/2; \quad b \geq 2/3\} = 1/4$$

Řešení x^* je s pravděpodobností 0.75 nepřipustné.

Určete jaké je optimální řešení s pravděpodobností 1.

Ověřte, že je to

$$\min \{x_1 + x_2 : x \in X\} = 7, \quad \text{pro } x^* = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} 4.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

ÚVOD DO TEORIE HER

Konečná hra je hra, v níž prostory strategií tvoří konečnou množinu.

Hra s konstantním součtem je hra, v níž při všech strategických hrách je součet výher všech hráčů konstantní

$$\sum_{i=1}^n J_i(x_1, \dots, x_n) = K, \quad \forall x_i \in X_i$$

Součet K není ve hře s konstantním součtem závislý na strategiích.

Hra s nulovým součtem je při $K = 0$.

Ve hrách existují problémy dvojího druhu:

- Jak by se v rozhodovací situaci choval průměrný jedinec - deskriptivní hledisko.
- Jaké je v dané situaci objektivně nejlepší rozhodnutí - normativní hledisko.

Teoreticky zajímavé je normativní hledisko. Deskriptivní hledisko někdy nelze ponímat, například při rozhodování při riziku.

ÚVOD DO TEORIE HER

Teorie her se zabývá řešením matematických modelů konfliktních situací.

Různé názvosloví

Reálná rozhodovací situace	Matematický model této situace - hra	Teorie optimálního řízení
rozhodovací situace účastník rozhodnutí množina rozhodnutí	hra v normálním tvaru hráč strategie prostor strategií	optimalizační problém řídící veličina (řízení) hodnoty řídících veličin množina přípustných hodnot říd. veličin
důsledky rozhodnutí důsledek	výplatní funkce výhra	kritérium jakosti řízení hodnota kritéria

Hra v normálním tvaru

$$\{Q, X_1, \dots, X_n, J_1(x_1, \dots, x_n), \dots, J_n(x_1, \dots, x_n)\}$$

kde $Q = \{1, 2, \dots, n\}$ jsou hráči, množiny X_i až X_n jsou množiny strategií hráčů 1 až n ;

$x_1 \in X_1$ až $x_n \in X_n$ jsou strategie hráčů a $J_i(x_1, \dots, x_n)$ jsou výhry hráče i .

Antagonistický konflikt

Hry s konstantním součtem

Antagonistický konflikt dvou účastníků.

Matematickým modelem antagonistického konfliktu je hra dvou hráčů v normálním tvaru s konstantním součtem.

Strategii prvního hráče je u a strategií druhého hráče je v . Modelem antagonistického konfliktu je hra

$$\{Q = \{1, 2\}; U, V; J_1(u, v), J_2(u, v)\}$$

Je rozumné definovat **optimální strategii** jako takovou strategii, od níž žádná odchylka nemůže přinést hráči výhodu, za předpokladu, že druhý hráč zachová svoji optimální strategii.

Optimální strategie prvního hráče je $u^* \in U$ a optimální strategie druhého hráče je $v^* \in V$.

$$J_1(u, v^*) \leq J_1(u^*, v^*), \quad \forall u \in U, v \in V$$

$$J_2(u^*, v^*) \leq J_2(u^*, v^*), \quad \forall u \in U, v \in V$$

Ve hře s nulovým součtem je $J_2 = -J_1$ stačí uvažovat pouze jedinou výplatní funkci $J = J_1$.

Hra s nulovým součtem je určena množinami $\{Q = \{1, 2\}; U, V; J(u, v)\}$.

Optimální strategie u^*, v^* jsou strategie, pro které platí

$$J(u, v^*) \leq J(u^*, v^*) \leq J(u^*, v).$$

První hráč se strategiem u se snaží maximalizovat výplatní funkci, zatímco druhý hráč se volbou strategií v snaží výplatní funkci minimalizovat.

Dále je zřejmé, že i ve hře s konstantním součtem lze použít jedinou výplatní funkci, neboť $J_2 = K - J_1$.

Maticové hry

Konečný antagonistský konflikt dvou hráčů popisujeme **maticovou hrou**.
Konečný počet strategií $u \in U$ prvního hráče očíslovme přirozenými čísly 1 až m .
Podobně konečný počet strategií druhého hráče $v \in V$ očíslovme přirozenými čísly 1 až n .
Potom konečná hra s nulovým součtem je **maticová hra**
 $\{Q = \{1, 2\}; U = \{1, \dots, m\}, V = \{1, \dots, n\}; J(i, j) = a_{i,j}; i \in U; j \in V\}$,
kde matice A rozměru $m \times n$ s prvky $a_{i,j}$ je **matice hry**.
Poznámka: První hráč vybírá řádek i v matici hry a druhý hráč vybírá sloupec j v matici hry. První hráč chce maximalizovat a druhý hráč minimalizovat prvek $a_{i,j}$ v matici hry.
Situace je úplně jasná, existuje-li v matici hry A prvek, který je současně nejmenší na řádku a největší ve sloupci.

$$\varphi_i = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix}$$

$$\psi_j = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \\ (6) \end{matrix}$$

První hráč, chce maximalizovat a proto po jednotlivých řádcích nalezne nejmenší prvek (pro něho nejhorší případ). První hráč vybere pochopitelně ten řádek i^* , v němž je minimální prvek největší $\varphi_{i^*} = \max, \varphi_{i^*} = 2$ a $\varphi_{i^*} = 3$.
Druhý hráč, který volí sloupec j matice A , chce minimalizovat a proto po jednotlivých sloupcích nalezne největší prvek (pro

	Zima			
	míná	normální	krutá	
koupeno v létě [q]	10	1000	1750	3000
	15	1500	1500	2500
	20	2000	2000	2000

V tabulce jsou uvedena vydání, která se snažíme minimalizovat.
Naše rozhodování spočívá ve volbě řádku a strategie prvního hráče, který volí řádky, dle zvyklosti je taková, že první hráč hledá nejvyšší výhru.

$$\varphi_i \text{ (min. v řádku)} = \begin{bmatrix} -1000 & -1750 & -3000 \\ -1500 & -1500 & -2500 \\ -2000 & -2000 & -2000 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (-3000) \\ (-2500) \\ (-2000) \end{matrix}$$

$$\psi_j \text{ (max. ve sloupci)} = \begin{bmatrix} -1000 & -1500 & -2000 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (-1000) \\ (-1500) \\ (-2000) \end{matrix}$$

Hra má sedlový bod v -2000 . Optimální vydání je tedy 2000Kč a optimální strategie je nakoupit v létě 20q uhlí.
Je zřejmé, že druhý hráč (příroda) není inteligentní hráč.

něho nejhorší případ). Druhý hráč Vybere ten sloupec j^* , v němž je maximální prvek nejmenší $\psi_{j^*} = \min, \psi_{j^*}$, tedy $j^* = 1$ a $\psi_{j^*} = 3$.
Protože se jedná o stejný prvek $a_{i^*,j^*} = a_{2,1} = 3$, je tento prvek **sedlovým prvkem hry** a strategie $i^* = 2, j^* = 1$ je optimální strategie. Prvek $a_{i^*,j^*} = J(i^*,j^*)$ se nazývá **cena hry**.

Odhází-li se libovolný hráč od takové optimální strategie, poškodí se tím a protihráč získá.
Pro sedlový bod platí

$$\max_i \min_j a_{i,j} = \min_j \max_i a_{i,j}$$

V teorii her veličina $\max_i \min_j a_{i,j}$ je **dolní cena hry**. Je to zaručená výhra prvního hráče.
Veličina $\min_j \max_i a_{i,j}$ je **horní cena hry**. Je to zaručená výhra druhého hráče.
Obecně platí

$$\max_i \min_j a_{i,j} \leq \min_j \max_i a_{i,j}$$

Příklad: Vyřešíme si problém nákupu uhlí na zimu.
Bude-li zima mírná, v zimě spotřebuji 10q uhlí, bude-li zima normální, pak 15q a bude-li zima krutá, pak 20q uhlí.
V létě 1q uhlí spojí 100Kč a v zimě jsou ceny uhlí 100Kč, 150Kč a 200Kč podle toho, bude-li zima mírná, normální či krutá.
Jaké množství uhlí koupit v létě, abych minimalizoval své celkové vydání za nákup uhlí na zimu.
Příroda, jako můj protihráč, má tři možnosti a sice, že zima bude mírná, normální nebo krutá.

Směšené rozšíření maticové hry

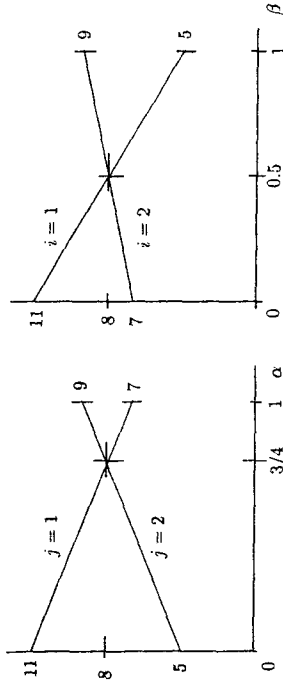
Situace však může být poněkud komplikovanější. Mějme hru s výplatní maticí

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \varphi_i \\ (5) \\ (7) \end{matrix}$$

$$\psi_j \quad \begin{matrix} (11) \\ (9) \end{matrix}$$

První hráč má zaručenou v nejhorším případě výhru 7 (dolní cena hry).
Naopak druhý hráč má zaručenou výhru 9 (horní cena hry).
Hráči nyní mají důvod svá rozhodnutí tajit - hra nemá sedlový bod.
Platí $7 = \max_i \min_j a_{i,j} < \min_j \max_i a_{i,j} = 9$.

Pevné strategie nazýváme **ryzí strategie**. Pokud hra nemá sedlový bod, nemá řešení na množině ryzích strategií.
Budeme předpokládat, že každý hráč bude své strategie vybírat náhodně s určitou pravděpodobností, takové strategie nazýváme **smíšené strategie**.



Obrázek 2: Smíšené strategie 1. hráče Smíšené strategie 2. hráče

Druhý hráč volí ryzí strategie $j = 1$ nebo $j = 2$ a první hráč volí smíšené strategie.

Číslo $p_2 = \alpha$ značí pravděpodobnost volby druhé strategie, $p_1 = 1 - \alpha$ je pravděpodobnost volby první strategie.

Platí samozřejmě $p_1 + p_2 = 1$ a $\alpha \in [0, 1]$.

Pokud druhý hráč volí ryzí strategii $j = 1$, bude cena hry

$$p_1 a_{1,1} + p_2 a_{2,1} = (1 - \alpha)11 + 7\alpha$$

Podobně, volí-li druhý hráč strategii $j = 2$, bude cena hry v závislosti na α vyjádřena

$$p_1 a_{1,2} + p_2 a_{2,2} = (1 - \alpha)5 + 9\alpha$$

Provedeme konstruktivní důkaz předchozího tvrzení, z něhož získáme návod na řešení lineárním programováním.

Uvažujme nejprve maticovou hru, jejíž matice má všechny prvky kladné. Označíme cenu hry jako $\gamma = J(u^*, v^*)$.

Pro neoptimální strategii platí

$$u^T A v^* \leq \gamma \leq (u^*)^T A v$$

pro všechny $u \in (U)$; $v \in (V)$.

Protože $u \geq 0$; $v \geq 0$ a dle předpokladu také $a_{i,j} \geq 0$, pak $\gamma \geq 0$.

Aby pravá nerovnost v platila pro všechny $v \in (V)$ stačí, aby platila pro všechny v ve tvaru $[1, 0, \dots, 0]^T$, $[0, 1, 0, \dots, 0]^T$, až $[0, 0, \dots, 1]^T$, to je pro ryzí strategie. Pro ryzí strategie dostaneme soustavu nerovností

$$a_{11}u_1^* + a_{21}u_2^* + \dots + a_{m1}u_m^* \geq \gamma \quad \text{pro } v = [1, 0, \dots, 0]^T$$

$$\vdots$$

$$a_{1n}u_1^* + a_{2n}u_2^* + \dots + a_{mn}u_m^* \geq \gamma \quad \text{pro } v = [0, 0, \dots, 1]^T$$

Z levé nerovnosti v dostaneme při volbě ryzích strategií u obdobné nerovnosti ve tvaru

$$a_{11}v_1^* + a_{12}v_2^* + \dots + a_{1n}v_n^* \leq \gamma \quad \text{pro } u = [1, 0, \dots, 0]^T$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}v_1^* + a_{m2}v_2^* + \dots + a_{mn}v_n^* \leq \gamma \quad \text{pro } u = [0, 0, \dots, 1]^T$$

Zavedeme nové nezáporné proměnné

$$x_i = \frac{u_i^*}{\gamma}; \quad u_j = \frac{v_j^*}{\gamma}$$

Úsečky se protínají v bodě o souřadnicích $\alpha = 3/4$, to znamená, že první hráč volí strategii $i = 1$ s pravděpodobností $p_1 = 1 - \alpha = 1/4$ a druhou strategii $i = 2$ s pravděpodobností $p_2 = \alpha = 3/4$. Cena hry je potom rovna 8.

Tuto cenu hry nemůže druhý hráč ovlivnit.

Podobně lze nalézt smíšené strategie druhého hráče.

Volí-li první hráč strategii $i = 1$, je cena hry v závislosti na pravděpodobnosti volby strategie druhého hráče známa

$$q_1 a_{1,1} + q_2 a_{1,2} = (1 - \beta)a_{1,1} + \beta a_{1,2} = (1 - \beta)11 + 5\beta.$$

Volíme-li pravděpodobnosti volby strategie druhého hráče $q_1 = 0.5$, $q_2 = 0.5$ a pravděpodobnosti volby strategie prvního hráče $p_1 = 0.25$ a $p_2 = 0.75$, pak tato rozšířená hra má sedlový bod a optimální cena hry je rovna 8.

Hledáme-li optimální strategii mezi pravděpodobnostními předpisy, dostaneme nekonečnou hru, kterou označujeme jako smíšené rozšíření původní hry.

Prostory strategií prvního a druhého hráče jsou

$$(U) = \left\{ u = [u_1, \dots, u_m]^T, \sum_{i=1}^m u_i = 1; u_i \geq 0 \right\}$$

$$(V) = \left\{ v = [v_1, \dots, v_n]^T, \sum_{j=1}^n v_j = 1; v_j \geq 0 \right\}$$

Potom u_i, v_j jsou rovny pravděpodobnostem s nimiž první hráč volí strategii i resp. druhý hráč volí strategii j . Výplnit funkce této hry je

$$J(u, v) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_i a_{i,j} v_j = u^T A v$$

Základní věta teorie maticových her:

smíšené rozšíření každé maticové hry má řešení.

Potom soustava nerovností přejde do tvaru

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq 1$$

$$\vdots$$

$$a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq 1$$

podobně druhá soustava přejde do tvaru

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \leq 1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \leq 1$$

Potom soustava je omezení úlohy lineárního programování s funkcí

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = \frac{1}{\gamma}$$

ktou máme minimalizovat. Platí

$$\min \{ b^T x : A^T x \geq c; x_i \geq 0; i = 1, \dots, m; c^T = [1, \dots, 1], b^T = [1, \dots, 1] \} \quad (\text{Důalní LP})$$

Hledáme totiž u_i^* tak, aby γ bylo maximální. Platí $u_i^* = \gamma x_i$.

Sečteme-li předchozí rovnice pro všechna i , pak $\sum u_i^* = 1 = \gamma \sum x_i$.

Je-li γ výběrem u_i^* maximalizováno, pak x_i hledáme tak, aby $\sum x_i$ bylo minimalizováno.

Druhé nerovnosti jsou omezení úlohy lineárního programování, která je důalní k předchozí úloze. Kritérium

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = \frac{1}{\gamma}$$

kteří máme výběrem y_j maximalizovat. Je to tedy úloha lineárního programování

$$\max \{c^T y : Ay \leq b; y_j \geq 0; j = 1, \dots, n; c^T = [1, 1, \dots, 1]^T, b^T = [1, 1, \dots, 1]^T\} \quad (\text{Primární LP})$$

Cena hry je

$$J(u^*, v^*) = \gamma = \frac{1}{c^T y} = \frac{1}{\sum y_i}$$

a smíšené strategie druhého hráče jsou

$$v^* = [v_1^*, \dots, v_n^*]^T = [y_1 \gamma, \dots, y_n \gamma]^T$$

Řešení duální úlohy určí smíšené strategie prvního hráče

$$u^* = [u_1^*, \dots, u_m^*]^T = [x_1 \gamma, \dots, x_m \gamma]^T$$

Pokud matice A nemá všechny prvky kladné (nezáporné), pak ke všem jejím prvkům přičteme takové kladné číslo k , aby prvky nové matice již nezáporné byly.

Cenu původní hry získáme odečtením konstanty k od ceny upravené hry.

Příklad: Maticová hra

Jedná o úlohu lineárního programování ve tvaru

$$\max \begin{cases} y_1 + y_2 : & 11y_1 + 5y_2 \leq 1 \quad ; y_i \geq 0 \\ & 7y_1 + 9y_2 \leq 1 \end{cases}$$

Ze simplexové tabulky plyne řešení $y_1 = 1/16, y_2 = 1/16$ a cena hry je rovna $\gamma = J^* = 1 / \sum y_i = 8$.

Příklad: Návrh kvalitního zesilovače

Kvalita nějakého zesilovače závisí na vlastnostech jednoho kondenzátoru.

Tento kondenzátor v běžném provedení stojí 1 Kč, ale 10 Kč stojí záruční oprava, je-li vadný.

Můžeme však použít kondenzátor kvalitnější, který stojí 6 Kč, za nějž výrobce nese záruku v tom smyslu, že uhradí náklady na opravu, je-li kondenzátor vadný.

Můžeme si také zvolit mimořádně kvalitní kondenzátor, který stojí 10 Kč, za nějž výrobce ručí tak, že v případě, že je vadný, nejen uhradí záruční opravu, ale ještě vrátí částku za jeho nákup.

Tuto reálnou rozhodovací situaci můžeme popsat maticovou hrou. První hráč má tři možné strategie a sice koupit normální, lepší nebo nejvyšší kondenzátor.

Druhý hráč - příroda - rozhodne o tom, zda bude kondenzátor dobrý či vadný. Výplatní matice této hry

	Příroda	
	Kondenzátor dobrý	Kondenzátor špatný
Koupě normálního kondenzátoru	-1	-10
Koupě kvalitnějšího kondenzátoru	-6	-6
Koupě nejvyššího kond.	-10	0

Prvky výplatní matice A jsou vyjádřeny, mají záporné znaménko, neboť první hráč podle konvence volí řádky a maximalizuje výhru - tedy minimalizuje výdání.

y_1	y_2	y_3	y_4	b
11	5	1	0	1
7	9	0	1	1
-1	-1	0	0	0
64/9	0	1	-5/9	4/9
7/9	1	0	1/9	1/9
-2/9	0	0	1/9	1/9
1	0	9/64	-5/64	1/16
0	1	-7/64	11/64	1/16
0	0	1/32	3/32	1/8

Optimální strategie druhého hráče

$$v^* = [\gamma y_1, \gamma y_2]^T = [0.5, 0.5]^T$$

Duální řešení čteme v posledním řádku simplexové tabulky $x_1 = 1/32, x_2 = 3/32$.

Smíšené strategie prvního hráče

$$u^* = [\gamma x_1, \gamma x_2]^T = [1/4, 3/4]^T$$

Matice A nesplňuje podmínku nezápornosti prvků a proto ke každému jejímu prvku přičteme +10.

Úloha lineárního programování, odpovídající smíšenému rozšíření maticové hry

$$\max \begin{cases} 9y_1 & \leq 1 \\ y_1 + y_2 & + 4y_2 \leq 1 : y_i \geq 0 \\ & 10y_2 \leq 1 \end{cases}$$

Řešení primární úlohy je $y_1 = 1/9, y_2 = 1/10$. Cena upravené hry je $\gamma = 1/(y_1 + y_2) = 90/19$. Cena původní hry

$$J(u^*, v^*) = \frac{90}{19} - 10 = -\frac{100}{19} = -5.26$$

Optimální strategie druhého hráče $v^* = [\gamma y_1, \gamma y_2]^T = [10/19, 9/19]^T$

Optimální strategie prvního hráče $u^* = [\gamma x_1, \gamma x_2, \gamma x_3]^T = [10/19, 0, 9/19]^T$.

Jak v praxi realizovat smíšené strategie.

Je třeba si zvolit nějaký náhodový mechanismus, který generuje čísla se stejnou pravděpodobností jako jsou pravděpodobnosti smíšených strategií. Při realizaci náhodného pokusu dostaneme řešení.

Mějme například smíšené strategie rovné $u^* = [1/6, 1/3, 1/2]$. Náhodný generátor, který generuje výstupy s pravděpodobnostmi $1/6, 1/3$ a $1/2$ můžeme realizovat například náhodným pohledem na vřetřínovou ručičku hodinek.

Pokud bude ukazatel v poloze 0 až 10s - volíme první strategii, bude-li v poloze 10s až 30s - volíme druhou strategii a bude-li konečně ukazatel v poloze 30s až 60s - zvolíme třetí strategii.

Pesimistický založení hráči nebudou chtít své rozhodnutí svěřit nějakému náhodovému mechanismu. Náhodový mechanismus může zvolit strategii značně nevýhodnou, mající třeba malou pravděpodobnost.

Rozhodování při riziku a neurčitosti

Budeme předpokládat, že pouze jeden (podle konvence první) účastník konfliktu je inteligentní.

Druhý je lhotejný ke své výhře a volí své strategie náhodně.

Výplnití funkce druhého hráče nemusíme uvažovat, neboť on je lhotejný ke své výhře.

Druhý hráč se rozhoduje tak, že volí své strategie v náhodně podle nějakého rozložení pravděpodobností $p(v)$ na množině V .

Chování prvního hráče závisí na tom, zda rozložení $p(v)$ zná či nezná.

Zná-li první hráč rozložení $p(v)$, jedná se o **rozhodování při riziku**, nezná-li první hráč rozložení $p(v)$, jedná se o **rozhodování při neurčitosti**.

Rozhodování při riziku

Při rozhodování s rizikem spočítáme pro každou strategii u prvního hráče střední hodnotu výhry

$$\mathcal{E}(u) = \int_V J(u, v)p(v)dv$$

Strategie prvního hráče je optimální, když je střední hodnota výhry maximální

$$u^* = \arg \max_{u \in U} \mathcal{E}(u)$$

Pro konečnou hru s maticí hry A , druhý hráč volí sloupec j s pravděpodobností p_j .

Je-li konečná množina $V = E^1$, pak pro existenci rozložení s nejmenším obsahem informace musíme předpokládat znalost rozptylu a střední hodnoty rozložení. Potom rozložení s nejmenším obsahem informace je normální rozložení $N(\mu, \sigma^2)$.

Pro konečné hry stanovíme optimální strategii i^* podle principu nedostatečné evidence tak, že sečtené všechny prvky v řádkách matice A a vybereme jako optimální ten řádek, v němž je tento součet maximální

$$i^* = \arg \max_i \sum_{j=1}^n a_{i,j}$$

Princip minimaxu ztráty

Optimální rozhodnutí nás zajišťuje proti velkým ztrátám ve srovnání s rozhodnutím, které bychom učinili při znalosti ryzi strategie druhého hráče.

Definujeme si funkci ztrát $Z(u, v)$

$$Z(u, v) = J(u, v) - \max_u J(u, v)$$

Ztráta - rozdíl výhry prvního hráče od maximální výhry při dané strategii druhého hráče.

Optimální strategie u^* - pro ni je maximální $\min_v Z(u, v)$.

U konečných her - ztrátová matice Z s prvky $z_{i,j}$

$$z_{i,j} = a_{i,j} - \max_k a_{k,j}$$

Optimální strategie i^* - maximalizuje řádková minima matice ztrát (dolní cena hry).

Obrana proti námičkám těch, kteří "jsou po bitvě generální".

Princip ukazatele optimismu

Pak první hráč volí takovou strategii i^* , pro kterou je střední hodnota výhry maximální.

$$i^* = \arg \max_i \sum_{j=1}^n a_{i,j}p_j$$

Každou výhru ve sloupci násobím pravděpodobností p_j příslušného sloupce a první hráč volí strategii (takový řádek), pro kterou je řádkový součet takto vyvážených prvků maximální.

Rozhodování při neurčitosti

Neexistuje jediná volba optimální strategie,

Existují různé definice optimální strategie, které se nazývají **principy**. Uvedeme některé z nich.

Princip minimaxu

Pesimisticky založení hráči volí takovou strategii, aby se zajistili proti nejhoršímu případu - volí dolní cenu hry. Volíme i^* takové, aby

$$i^* = \arg \max_i \min_j a_{i,j}$$

Princip nedostatečné evidence

Můžeme předpokládat, že všechny strategie druhého hráče jsou rovnocenné, volí je tedy se stejnou pravděpodobností.

Je-li množina V nekonečná, pak předpokládáme u druhého hráče rozložení s nejmenším obsahem informace.

Je-li množina V interval, pak rozložení s nejmenším obsahem informace je rovnoměrné rozložení.

Je-li množina V interval $[\gamma, \infty)$, pak rozložení s nejmenším obsahem informace neexistuje.

Známe-li střední hodnotu μ , pak rozložení s nejmenším obsahem informace je exponenciální rozložení.

Vypočítáme

$$M(u) = \max_{v \in V} J(u, v)$$

$$m(u) = \min_{v \in V} J(u, v),$$

volíme ukazatel optimismu $\alpha \in [0, 1]$ prvního hráče.

Optimální strategie u^* maximalizuje výraz

$$P(u) = \alpha M(u) + (1 - \alpha)m(u)$$

Pro $\alpha = 0$ je princip totožný s principem minimaxu - zajistíme dolní cenu hry.

Pro $\alpha = 1$ volíme strategii, v jejímž řádku je maximální prvek matice hry. Riziko splyvá s hazardem.

Pro konečné hry volíme strategii i^* pro kterou je maximální

$$\alpha \max_j a_{i,j} + (1 - \alpha) \min_j a_{i,j}$$

Příklad: Mějme hru s výplacní maticí

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Spočítáme strategie podle různých principů.

Podle principu minimaxu určíme dolní cenu hry, která je rovná 1 a strategie je $i^* = 1$.

Podle principu nedostatečné evidence je součet prvků v řádku maximální v druhém řádku, proto $i^* = 2$.

Pro určení strategie podle minimaxu ztráty sestavíme ztrátovou matici Z tak, že v každém sloupci nalezneme maximální

prvek a ten odečteme od všech prvků ve sloupci, pak

$$\psi_i Z = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -6 \\ -1 & -8 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (-4) \\ (-6) \\ (-8) \end{matrix}$$

Maximum z řádkových minim je zřejmé (-4) a nastane při $i^* = 1$.

Strategie podle principu ukazatele optimismu:
Funkce $P(u)$

$$P(1) = 3\alpha + 1; \quad P(2) = 8\alpha; \quad P(3) = 6\alpha$$

Pro $\alpha = 0$ je podle ukazatele optimismu $i^* = 1$,
pro $\alpha = 1$ je $i^* = 2$, protože v druhém řádku leží maximální prvek.
Strategii $i^* = 2$ budeme volit pro $\alpha \geq 1/5$.

Příklad: Volba léku.

Pacient má jedno z pěti možných virových onemocnění.
Lékař má k dispozici tři druhy léků, jejichž léčebné účinky jsou závislé na tom, kterou nemoc má pacient.
První lék zaručuje z 50% zdoání prvních čtyř nemocí. Druhý lék bezpečně léčí první druh.
Třetí lék ničí v 50% viry při druhém onemocnění a zaručeně zdolá pátý druh nemoci.
Situaci popíšeme maticovou hrou - strategii lékaře je volba jednoho ze tří léků a příroda volí jeden druh nemoci.

hry, pak hodnota hry bude pouze

$$p_1 \frac{9}{14} + p_2 \frac{13}{14} = 37\%$$

Neantagonistický konflikt dvou hráčů

Častější než konflikty s protichůdnými zájmy jsou konflikty, v nichž si každý účastník sleduje své vlastní zájmy.
Matematickým modelem takového konfliktu je hra dvou hráčů s nekonstantním součtem.
Zde je obtížné a nejednoznačné definovat optimální strategii.

Uvažujme například spor dvou podniků. Jejich možné akce jsou:

1. Žalovat druhý podnik - tuto strategii označíme Z.
2. Nabídnout druhému podniku spojení v jedinou organizaci - strategie S.
3. Navrhnout druhému podniku úspešek - strategie U.

Výplnní dvojmatice hry s nekonstantním součtem je následující

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} Z & S & U \end{matrix} \\ \begin{matrix} Z \\ S \\ U \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1; -1 & 9; -10 & 9; -10 \\ -10; 9 & -5; 100 & 0; 0 \\ -10; 9 & 0; 0 & 5; 5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Na prvními místě je výplata prvního hráče $J_1(u, v)$ (ten volí řádky) a na druhém místě je výplata druhého $J_2(u, v)$.

(minimální řádek)

onemocnění

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 50 & 50 & 50 & 0 \\ 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 100 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} (0) \\ (0) \\ (0) \end{matrix}$$

(max. sloupec) (100) (50) (50) (50) (100)

Hra nemá sedlový bod.

Považujeme-li hru za antagonistický konflikt dvou inteligentních hráčů, je optimální řešení ve smíšených strategiích $u^* = [2/3, 0, 1/3]^T$ a cena hry je $\gamma = 33\%$.

Předpokládejme, že jsou známy pravděpodobnosti výskytu jednotlivých onemocnění $\frac{1}{14} : \frac{3}{14} : \frac{3}{14} : \frac{2}{14} : \frac{5}{14}$
Nyní se jedná o hru s rizikem. Při použití prvního léku je pravděpodobnost úspěchu

$$\frac{50}{14} + 50 \cdot \frac{3}{14} + 50 \cdot \frac{2}{14} + 0 \cdot \frac{5}{14} = 50 \cdot \frac{9}{14} = 32,1\%$$

Pro druhý lék je pravděpodobnost úspěchu obdobně $100 \cdot \frac{1}{14}$ a pro třetí lék je pravděpodobnost úspěchu

$$50 \cdot \frac{3}{14} + 100 \cdot \frac{5}{14} = 50 \cdot \frac{13}{14} = 48\%$$

Optimální je třetí strategie - úspěch bude ve 48% případů.

Budou-li se nemoci vyskytovat s uvedenými pravděpodobnostmi, ale lékař bude volit své strategie podle smíšeného rozšíření

Žaluje-li jeden podnik druhý, získá pro sebe výhodu. Oboustranná žaloba není výhodná pro žádný podnik a spojení je výhodné pro druhý podnik.

Nelze-li uzavřít dohodu, budou volit hráči nejspíše strategie (Z, Z).

Existuje-li možnost uzavřít závaznou dohodu, bude výhodné, volí-li hráči strategii (S, S). Jejich společná výhra bude $100 - 5 = 95$. Druhý hráč ale musí ze své výhry dát prvnímu hráči kompenzaci za to, že mu k této výhře dopomohl.

Je-li možné uzavřít dohodu o volbě strategií, ale není možno přerozdělit výhry - přerozdělení by mělo formu úplatku, který není možno vymáhat ani předem vyplácet, domluví se hráči zřejmě na strategiích (U, U).

Dostáváme tedy tři možnosti řešení neantagonistického konfliktu dvou účastníků:

- nekooperativní teorie
- kooperativní teorie s přenosnou výhrou
- kooperativní teorie s nepřenosnou výhrou

Nekooperativní teorie

Vyhovující strategie je ta, jejíž jednostranné porušení poškodí hráče, který ji porušil.

Dvojici $\bar{u}, \bar{v}$ nazýváme **rovnovážné strategie**.

Zde se ale může stát, že volí-li jeden hráč nerovnovážnou strategii, poškodí se sice, ale druhého hráče poškodí více.

Stupeň vynucení rovnovážného bodu je zde slabší.

Potíže vznikají, je-li rovnovážných bodů více. Některý může být výhodný pro jednoho hráče a jiný pro druhého. Jejich strategie se pak mohou sejít mimo rovnovážný bod.

Dominující rovnovážný bod, je takový rovnovážný bod, pro který neexistuje jiný rovnovážný bod, který je výhodnější pro oba hráče.

Záměnné rovnovážné body jsou takové rovnovážné body, u nichž záměna rovnovážných strategií u libovolného hráče nemění cenu hry.

Volba rovnovážných strategií je rozumná pouze tehdy, je-li jediný dominující rovnovážný bod, nebo jsou-li všechny dominující rovnovážné body záměnné.

Takový rovnovážný bod nazýváme **optimálním rovnovážným bodem**.

Neantagonistický konflikt dvou účastníků s konečným počtem strategií popisujeme tzv. **dvojmatricovou hrou**. Strategie prvního hráče jsou $U = \{1, 2, \dots, m\}$ a druhého hráče jsou $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Výplatní funkce prvního a druhého hráče jsou

$$J_1(u, v) = a_{ij}, \quad i \in U; \quad J_2(u, v) = b_{ij}, \quad j \in V$$

Prvky a_{ij}, b_{ij} tvoří výplatní dvojmatice.

Nemá-li dvojmatricová hra rovnovážný bod, můžeme obdobně jako u obyčejné maticové hry zavést smíšené rozšíření dvojmatricové hry. Strategie u_i resp. v_j jsou pravděpodobnosti volby strategií prvního a druhého hráče. Výplatní funkce jsou $J_1(u, v) = u^T A v$ resp. $J_2(u, v) = u^T B v$, kde matice A resp. B mají prvky a_{ij} resp. b_{ij} .

Smíšené rozšíření každé dvojmatricové hry má řešení.

Řešení smíšeného rozšíření dvojmatricové hry vede na úlohu nelineárního (kvadratického) programování.

Kooperativní teorie - přenosná výhra

Neantagonistický konflikt, kde je možné uzavírat závazné smlouvy o volbě strategií i o přerozdělení výhry. Zde musíme vyřešit tři problémy:

- Kdy má smysl smlouvu uzavírat
- Jaké volit potom strategie
- Jak rozdělit výhru

Smlouvu má smysl uzavřít, získají-li hráči spoluprací více než při samostatném rozhodování.

Každý hráč si spočte svoji zaručenou výhru (dolní cenu hry).

Pro prvního hráče je to výhra J_u a pro druhého hráče je to výhra J_v , pak

$$J_u = \max_{u \in U} \min_{v \in V} J_1(u, v), \quad J_v = \max_{v \in V} \min_{u \in U} J_2(u, v)$$

Hráči si spočtou zisk, budou-li spolupracovat

$$J_s = \max_{u, v} [J_1(u, v) + J_2(u, v)]$$

Je zřejmé, že má význam uzavírat dohodu pouze tehdy, je-li $J_s > J_u + J_v$.

Hráči si pak zajistí minimální výhru a ještě mohou něco získat z přebytku.

Říkáme, že hra je podstatná, platí-li $J_s > J_u + J_v$, je-li $J_s = J_u + J_v$, pak je hra nepodstatná a v tom případě nemá smysl uzavírat dohody.

Při podstatné hře volí hráči strategie u_i, v_j , zajišťující společnou maximální výhru.

Příklad: Problém prestiže

Při jednání o nějakém problému je často důležitější odázka prestiže účastníků. Každý z účastníků může projevit buď neústupnost nebo ústupnost.

Jednostranná ústupnost vede ke ztrátě prestiže, oboustranná neústupnost vede k důsledkům nepříznivým pro oba hráče.

$$\begin{array}{c|cc} & U & V \\ \hline U & 0; 0 & -10; 10 \\ V & 10; -10 & -100; -100 \end{array}$$

kde U - ústupnost, V - neústupnost.

Rovnovážné body jsou dva a to strategie (U, N) nebo (N, U) .

Pro prvního hráče je výhodnější druhý rovnovážný bod (při něm on volí neústupnost)

pro druhého hráče je výhodnější první rovnovážný bod (při něm on volí také neústupnost).
Při tom neústupnost obou hráčů končí nepříznivě pro oba.

Podobný případ existuje při uzavírání dohod. Jestliže existuje možnost získat výhodu jednostranným porušením dohody, má konflikt řešení porušit dohodu pro obě strany, což je ve svých důsledcích nevýhodné pro oba.

Dohodu, jejíž porušení přináší výhodu pro toho, kdo ji poruší, je tedy lépe neuzavírat.

Příklad: Vězhřovo dilema - přiznání viny, nepřiznání viny

Problém, jak rozdělit výhru, není jednoduchý a jednoznačný.

Označme a_1 částku, kterou dostane první hráč, a_2 je pak částka, kterou dostane druhý hráč. Dvojice (a_1, a_2) je **rozdělení**.
Přijatečná omezení jsou zřejmé

$$a_1 + a_2 = J_s, \quad a_1 \geq J_u, \quad a_2 \geq J_v$$

Množinu rozdělení (a_1, a_2) splňující předchozí vztahy nazýváme **jádrem hry**.

Možná rozdělení.

Charitativní rozdělení

$$a_1 = \frac{J_s}{2}, \quad a_2 = \frac{J_s}{2}$$

je často nepřijatečné a mnohdy není ani jádrem hry.

Spravedlivé rozdělení je takové rozdělení, kdy se výhry rozdělí v poměru přínosu obou hráčů

$$a_1 : a_2 = (J_s - J_u) : (J_s - J_v)$$

Optimální rozdělení můžeme definovat jako rozdělení (a_1^*, a_2^*) , kde a_1^*, a_2^* jsou souřadnice těžiště jádra.

$$a_1^* = J_u + \frac{1}{2}(J_s - J_u - J_v)$$

$$a_2^* = J_v + \frac{1}{2}(J_s - J_u - J_v)$$

Hráči si ponechají zaručenou výhru a o zbytek se rozdělí rovnými díly.

Rozdělení společné výhry není tedy jednoznačné. Všechny úvahy vycházejí ze zaručených výher J_u a J_v .

Někdy ale není opodstatněný ani předpoklad zaručené výhry. Například jednoduchá dvojmatricová hra

$$\begin{bmatrix} 0 & -1000 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$$

má zřejmě $J_u = 0, J_v = 2; J_s = 12; a_1^* = 5, a_2^* = 7$.

Těžko druhý hráč (volící sloupce) přimutí prvního hráče, aby mu ze společné výhry něco dal, neboť pohružka volby první strategie (prvního sloupce) u druhého hráče znamená především pro něj katastrofu.

Kooperativní teorie - nepřenosná výhra

Hráči zde mohou uzavírat závazné smlouvy o volbě strategie, ale nikoliv o přerozdělení společné výhry.

Spolupráce je legální, přenos výhry má povahu úplatku. Zůstávají zde tedy pouze dva problémy

- Kdy má smysl uzavírat smlouvu o volbě strategií.
- Jaké strategie potom volit.

Dohodu o volbě strategií má smysl uzavírat, je-li alespoň pro jednoho hráče výhra v případě dohody vyšší než zaručená.

Dosažitelné rozdělení je dvojice (a_1, a_2) , pro kterou platí

$$a_1 = J_1(u, v), \quad a_2 = J_2(u, v) \quad \text{pro některé } u \in U, \quad v \in V$$

$$a_1 \geq J_u; \quad a_2 \geq J_v$$

kde J_u a J_v jsou dolní ceny hry obou hráčů. Dohodu je tedy výhodné uzavřít, je-li

$$(a_1, a_2) \neq (J_u, J_v)$$

Množinu dosažitelných rozdělení můžeme dále zúžit zavedením tzv. **paretovského rozdělení**.

Jde o takové dosažitelné rozdělení $a = (a_1, a_2)$, že neexistuje jiné dosažitelné rozdělení, v němž by jeden hráč získal více a druhý netratil. Množinu paretovského rozdělení označíme P .

Podle kooperativní teorie s přenosnou výhrou nalezneme nejprve zaručené výhry obou hráčů (dolní ceny her obou hráčů).

Zřejmě platí $J_u = 4, J_v = 4$.

Při spolupráci získají největší společnou výhru $J_s = 19$.

Spolupráce je tedy výhodná, optimální strategie je pak $(i^*, j^*) = (3, 2)$ a optimální rozdělení společné výhry je $a_1^* = 9,5,$

$$a_2^* = 9,5.$$

Při kooperaci a nepřenosné výhře určíme nejprve množinu dosažitelných rozdělení.

Jsou to zřejmě rozdělení s výhrami $(6, 10); (8, 5); (5, 6); (6, 6); (5, 5); (15, 4)$, tedy s výhrami alespoň $(J_u, J_v) = (4, 4)$. Dohodu je tedy výhodné uzavřít.

Paretové rozdělení jsou $(6, 10); (8, 5); (15, 4)$.

Střední hodnota paretovských rozdělení je

$$b = \left(\frac{1}{3} (6 + 8 + 15) ; \frac{1}{3} (10 + 5 + 4) \right) = (9,6 ; 6,3)$$

Nejbližší rozdělení ke střední hodnotě je $(8 ; 5)$, které je optimálním rozdělením a optimální strategie $(i^*, j^*) = (1, 2)$. □

Volba optimální strategie v neantagonistickém konfliktu má silný subjektivní motiv.

Je zřejmé, že složitější než získat řešení hry, je správné sestavit matematický model konfliktu.

Tyto úvahy ústí v tzv. **teorii užitku** či **teorii rizika**.

Abychom našli jediné rozdělení, které bychom mohli označit za optimální, budeme hledat rozdělení, které je nejbližší ke střední hodnotě paretovských rozdělení.

Nechť tedy $b = (b_1, b_2)$ je střední hodnota rovnoměrného rozložení pravděpodobnosti na P (je-li P ohraničená množina).

Rozdělení $a^* = (a_1^*, a_2^*)$ nazveme optimálním rozdělením, jestliže

$$\|a^*, b^*\| = \min_P \|a - a^*, b - b^*\|$$

Příklad : Uvažujme konečnou dvojmatricovou hru s výplatní dvojmatricí

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} (j) \\ 6; 10 & 8; 5 & 4; 2 \\ (i) & 1; 3 & 5; 6 & 6; 6 \\ & 0; 0 & 15; 4 & 5; 5 \end{matrix} \end{matrix}$$

Podle nekooperativní teorie nalezneme nejprve všechny rovnovážné body. Jsou to zřejmě body (i, j) o souřadnicích $(1, 1)$ a $(2, 3)$ s výhrami $(6, 10)$ a $(6, 6)$.

První z nich je sice výhodnější pro druhého hráče, ale není dominující. Hra při nekooperativní teorii nemá řešení.

Nekonečné hry

Množiny strategií mají nekonečný počet prvků.

Problémy - existence sedlového bodu
ani smíšené rozšíření nemusí mít řešení.

Hru v normálním tvaru - prostory strategií jsou spočetné množiny - lze je očíslovat přír. čísly.

Existence optimální strategie v nekonečné hře s nulovým součtem:

Věta: Pokud prostory strategií jsou kompaktní konvexní množiny a výplatní funkce $J(x, y)$ je spojitá funkce na $X \times Y$, která je konvexní v x (pro každé $y \in Y$) a konvexní v y , pak tato hra má řešení.

Polyedrické hry:

Množiny X, Y jsou polyedrické konvexní množiny. Výplatní funkce $J(x, y)$ je kvadratická

$$J(x, y) = x^T D y + g^T x + h^T y$$

Hra má řešení, pokud X a Y jsou neprázdné a omezené.

Obecné tvrzení:

Věta: Hra $\{Q = \{1, 2\}; X, Y; J(x, y)\}$ je v normálním tvaru s nulovým součtem.

Nechť existují čísla $\max_x \min_y J(x, y)$ a $\min_y \max_x J(x, y)$. Potom rovnost $\max_x \min_y J(x, y) = \min_y \max_x J(x, y)$ platí právě tehdy, když existují optimální strategie x^*, y^* , že $J(x^*, y^*) \leq J(x^*, y) \leq J(x, y^*) \leq J(x, y^*)$.

Příklad : Souboj dvou stíhačů

Pravděpodobnost zásahu od prvního stíhače je $P_1(x)$, od druhého je $P_2(y)$, obě na intervalu $(0, 1)$.

Jsou to spojitě nerostoucí funkce a $P_1(0) = P_2(0) = 1$.

Piloti jsou informováni o poloze.

Hodnocení souboje: +1, pokud je sestřeleno druhé letadlo a není první

-1, pokud je sestřeleno první letadlo a není druhé

0, pokud jsou obě zničena nebo není zničeno žádné.

Výplnití funkce

$$J(x, y) = \begin{cases} 2P_1(x) - 1 & \text{pro } x > y \\ P_1(x) - P_2(x) & \text{pro } x = y \\ 1 - 2P_2(y) & \text{pro } x < y \end{cases}$$

Pro $x > y$ to znamená, že první letoun vystřelí dříve.

Střední hodnota hry je: (+1) s pravděpodobností ($P_1(x)$) a (-1) s pravděpodobností ($1 - P_1(x)$) (když první nezásáhne,

druhý si počká na jistotu), proto

$$(+1) P_1(x) + (-1) (1 - P_1(x)) = 2P_1(x) - 1$$

Pro $x = y$:

(+1) první s pravděpodobností $P_1(x)$ zasáhne a druhý s pravděpodobností ($1 - P_2(x)$) nezásáhne a

(-1) druhý s pravděpodobností $P_2(x)$ zasáhne a první s pravděpodobností ($1 - P_1(x)$) nezásáhne, proto

$$(+1)P_1(x)(1 - P_2(x)) + (-1)(P_2(x))(1 - P_1(x)) = P_1(x) - P_2(x)$$

Podobně pro $x < y$ (druhý vystřelí dříve)

$$(-1)P_2(y) + (+1)(1 - P_2(y)) = 1 - 2P_2(y)$$

Řešení: Optimální strategie je $x^* = y^* = \alpha$, pro kterou platí

$$P_1(\alpha) + P_2(\alpha) = 1$$

Cena hry je

$$J^* = P_1(\alpha) - P_2(\alpha)$$

Důkaz: Musí platit

$$J(x, \alpha) \leq P_1(\alpha) - P_2(\alpha) \leq J(\alpha, y)$$

Vyšetříme pouze pravou nerovnost (druhý nevolí optimálně).

Pro $\alpha > y$ (druhý ve vzdálenosti α nevystřelí, ale první ano)

$$J(\alpha, y) = 2P_1(\alpha) - 1 = 2P_1(\alpha) - (P_1(\alpha) + P_2(\alpha)) = P_1(\alpha) - P_2(\alpha)$$

Platí tedy rovnost. Pro $\alpha = y$ je optimum.

Pro $\alpha < y$ (druhý vystřelí dříve)

$$J^* = P_1(\alpha) - P_2(\alpha) \leq J = 1 - 2P_2(y) = (P_1(\alpha) + P_2(\alpha)) - 2P_2(y)$$

Odtud

$$-2P_2(\alpha) \leq -2P_2(y), \quad \text{čili} \quad P_2(\alpha) \geq P_2(y)$$

Pro $y > \alpha$ to platí, protože $P_2(y)$ je nerostoucí.

4 - 5

NEJMENŠÍ ČTVERCE (LS)

Řešení: Zvolíme aproximační polynom třetího stupně,

$$U = a + bt + ct^2 + dt^3$$

V bodech sítě platí

$$U_i = \begin{bmatrix} 1 & t_i & t_i^2 & t_i^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 128$$

Zavedeme: vektor napětí $b = [U_1, \dots, U_{128}]^T$

vektor hledaných parametrů $x = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix}^T$ a

matici dat A , jejíž řádky jsou $\begin{bmatrix} 1 & t_i & t_i^2 & t_i^3 \end{bmatrix}$.

Pak

$$b = Ax + e, \quad e \text{ je vektor chyby}$$

Kritérium aproximace

$$J = \|e\|_2^2 = e^T e$$

Po dosazení $e = b - Ax$

$$J(x) = (Ax - b)^T (Ax - b) = x^T A^T Ax - x^T A^T b - b^T Ax + b^T b$$

Hledáme vektor x^* , minimalizující kritérium aproximace

$$J(x^*) = \min_x J(x), \quad x^* = \arg \min_x J(x)$$

Minimalizace kvadratických forem

Minimalizace kvadratických funkcí

- součástí mnoha numerických algoritmů
- řešení problémů aproximace a estimace
- existuje řada spolehlivých a rychlých algoritmů

Příklad 1. Aproximace charakteristiky termočlánku

Pro termočlánek Ch-A jsou v normě uvedeny hodnoty napětí termočlánku v závislosti na jeho teplotě. Hodnoty termomnapětí jsou tabelovány po 10 °C od 100 do 1370 °C.

U=4.095 4.508 4.919 5.327 5.733 6.137 6.539 6.939 7.338 7.737 8.137 8.537 8.938 9.341 9.745 10.151 10.560 10.969 11.381 11.793 12.207 12.623 13.039 13.456 13.874 14.292 14.712 15.132 15.552 15.974 16.395 16.818 17.241 17.664 18.088 18.513 18.938 19.363 19.788 20.214 20.640 21.066 21.493 21.919 22.346 22.772 23.198 23.624 24.050 24.476 24.902 25.327 25.751 26.176 26.599 27.022 27.445 27.867 28.288 28.709 29.128 29.547 29.965 30.383 30.799 31.214 31.629 32.042 32.455 32.866 33.277 33.686 34.095 34.502 34.909 35.314 35.718 36.121 36.524 36.925 37.325 37.724 38.122 38.519 38.915 39.310 39.703 40.096 40.488 40.879 41.269 41.657 42.045 42.432 42.817 43.202 43.585 43.968 44.349 44.729 45.108 45.486 45.863 46.238 46.612 46.985 47.356 47.726 48.095 48.462 48.828 49.192 49.555 49.916 50.267 50.633 50.990 51.344 51.697 52.049 52.398 52.747 53.093 53.439 53.782 54.125 54.466 54.807.

Problém : Interpolovat dané hodnoty v bodech mimo tabelované hodnoty.

Charakteristiku termočlánku aproximujeme polynomelem.

Původně se jednalo o problém řešení přeručené soustavy algebraických rovnic $Ax = b$.

V jazyce MATLAB se tento problém řeší příkazem $x^* = A \setminus b$.

Řešení přeručené soustavy algebraických rovnic jsme převedli na problém minimalizace kvadratické formy.

$$\text{Minimalizací určíme koeficienty polynomu třetího stupně } x^* = \begin{bmatrix} 0.13577 & 3.87510^{-2} & 6.74310^{-6} & -4.33710^{-9} \end{bmatrix}.$$

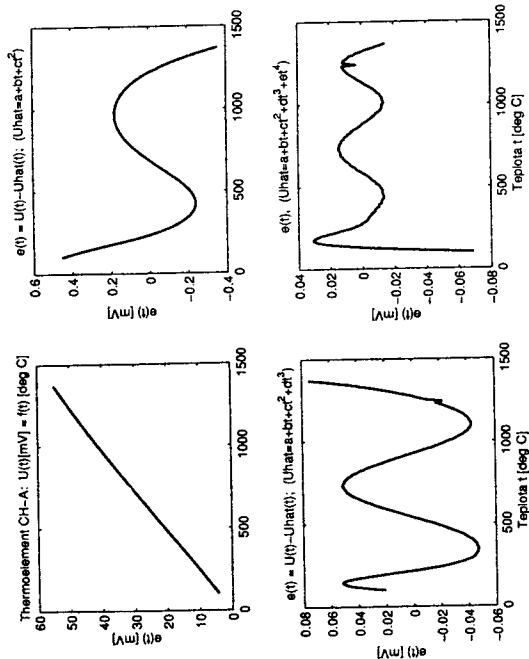
Maximální chyba aproximace $\max |e_i| = 0.07$.

$$\text{Je-li aproximační polynom druhého stupně, pak } x^* = \begin{bmatrix} -0.803061 & 4.471710^{-2} & -0.2810^{-6} \end{bmatrix}$$

a maximální chyba aproximace vzroste na hodnotu $\max |e_i| = 0.45$.

Zvyšování stupně aproximačního polynomu nemusí přinést snížení chyb aproximace.

Naopak při vysokém stupni aproximačního polynomu jsou průběhy aproximační křivky mezi danými body nevhodné.



Obrázek 3: Charakteristika termočlánku a chyby při aproximaci polynomy druhého až čtvrtého stupně

Minimalizace normy vektoru chyb rovnic vede opět na problém minimalizace kvadratické formy.

Příklad 3: Prediktivní řízení

Stavová rovnice systému

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + v(t), \\y(t) &= Cx(t) + Du(t) + e(t).\end{aligned}$$

$x(t)$, $y(t)$ a $u(t)$ je stav, vstup a výstup systému.

Kritérium kvality optimálního prediktivního řízení

$$J = \mathcal{E} \left\{ \sum_{i=1}^K (y(t) - w(t))^2 + \tau (u(t))^2 \mid x(1) \right\}$$

K - horizont prediktivní strategie,

$w(t)$ - reference

τ - váhový koeficient

Zavedeme složené vektory

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(K) \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} w(1) \\ w(2) \\ \vdots \\ w(K) \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u(1) \\ u(2) \\ \vdots \\ u(K) \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} v(1) \\ v(2) \\ \vdots \\ v(K) \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(K) \end{bmatrix}$$

Příklad 2. Identifikace parametrů diskrétního systému z naměřených dat.

Vnější popis diskrétního systému

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - \dots - a_n y(t-n) + b_0 u(t) + \dots + b_m u(t-m) + e(t)$$

$y(t)$ je výstup systému v čase t , $u(t)$ je vstup systému a

$e(t)$ náhodná veličina reprezentující nepřesnosti měření i aproximace.

Máme k dispozici množinu měření výstupní i vstupní veličiny v $t = \dots, 0, 1, \dots$

Z množiny měření vstupů a výstupů systému hledáme parametry systému $a_1, b_1, \dots$

$$\text{Zavedeme: vektor hodnot výstupu } b = [y(1), y(2), \dots, y(n)]^T,$$

$$\text{vektor neznámých parametrů } x = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \ b_0 \ \dots \ b_m]^T,$$

matici dat A

$$A = \begin{bmatrix} -y(0) & -y(-1) & \dots & -y(1-n), & u(1) & \dots & u(1-n) \\ -y(1) & -y(0) & \dots & -y(2-n), & u(2) & \dots & u(2-n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(\nu-1) & -y(\nu-2) & \dots & -y(\nu-n), & u(\nu) & \dots & u(\nu-n) \end{bmatrix}$$

Pro diskretní čas $t = i$ je diferenční rovnice systému $y_i = A_i x + e_i$.

Pro $t = 1, \dots, \nu$ dostaneme soustavu algebraických rovnic ve tvaru

$$b = Ax + e$$

a složené matice

$$P = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{K-1} \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{K-2}B & CA^{K-3} & \dots & D \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ C & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{K-2} & CA^{K-3} & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Kritérium je pak

$$J = \mathcal{E} \left\{ (Y - W)^T (Y - W) + \tau U^T U \mid x(1) \right\}, \quad Y = Px(1) + SU + QV + E$$

Minimalizace kritéria vede na optimální prediktivní strategii

$$U^* = -(S^T S + \tau I)^{-1} S^T (Px(1) - W)$$

Minimalizace - analytické vztahy

Kvadratická funkce

$$J(x, y) = x^T A x + x^T B y + y^T D x + y^T C y$$

A je pozitivně semidefinitní matice.

Hledáme minimum vzhledem k vektorové proměnné x .

$$x^* = \arg \min_x J(x, y)$$

Dva postupy

- analytický - používající derivaci kvadratických forem
- doplněním na úplný čtverec

Ad 1) Platí (pokud derivace skalární funkce podle vektoru je řádkový vektor)

$$\frac{\partial x^T A x}{\partial x} = x^T (A + A^T) \\ \frac{\partial x^T B y}{\partial x} = y^T B^T, \quad \frac{\partial y^T D x}{\partial x} = y^T D$$

Minimum nalezneme z podmínky nulového gradientu kritéria vzhledem k x

$$\frac{\partial J(x, y)}{\partial x} = 0, \quad \text{pro } x = x^*.$$

Použitím vztahů pro derivaci kvadratických forem dostaneme

$$(A + A^T) x + B y + D^T y = 0, \quad \text{pro } x = x^*$$

Můžeme předpokládat, že matice A je symetrická matice.

Můžeme ji symetrizovat zavedením nové symetrické matice $A_s = \frac{1}{2}(A + A^T)$.

Podobně lze symetrizovat i matici C .

Také můžeme předpokládat, že matice B a D jsou si až na transpozici rovny.

Pokud ne, pak zavedeme novou matici B_1 podle vztahu $B + D^T = 2B_1$ a touto novou maticí B_1 nahradíme matice B a D v kvadratické formě podle vztahu $B = B_1, D = B_1^T$.

Dále předpokládáme, že matice A i matice C jsou symetrické matice a matice B a D jsou si až na transpozici rovny.

Kvadratické funkce můžeme zapisovat také ve tvaru kvadratických forem

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} x^T & y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Složená matice M

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$$

je symetrická pozitivně semidefinitní matice (kvadratická forma $J(y, x)$ je nezáporná).

Uvažujme také kritérium s diferencemi řídící veličiny

$$J = \mathcal{E} \left\{ \sum_{t=1}^K (y(t) - u(t))^2 + r(\Delta u(t))^2 \mid x(1) \right\}$$

Rozřazený vektor diferencí

$$\Delta U = \begin{bmatrix} u(1) - u(0) \\ u(2) - u(1) \\ \vdots \\ u(K) - u(K-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(K) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = R U - U(0)$$

Vektorový tvar kritéria

$$J = \{(Y - W)^T (Y - W) + r(\Delta U)^T (\Delta U)\}, \quad Y = P x(1) + S U + Q V + E, \quad \Delta U = R U - U(0)$$

Minimalizace kritéria vede na optimální prediktivní strategii

$$U^* = -(S^T S + r R^T R)^{-1} [S^T (P x(1) - W) - r R^T U(0)]$$

Optimální x^*

$$x^* = -(A + A^T)^{-1} (B + D^T) y$$

Předchozí vztah platí pro pozitivně definitní matici A .

Hessova matice druhých derivací je $(A + A^T)$. Je to tedy minimum.

Ad 2) Jednodušší metoda minimalizace spočívá v úpravě na úplný čtverec.

Kvadratickou formu upravíme do tvaru

$$J(x, y) = (x - x^*)^T A (x - x^*) + y^T C y - (x^*)^T A x^*$$

Aby předchozí kvadratická forma byla rovna původní $J(x, y) = x^T A x + x^T B y + y^T D x + y^T C y$

$$-(x^*)^T A x = y^T D x, \quad -x^T A x^* = x^T B y$$

Protože předchozí vztahy platí pro všechna x , platí

$$-(x^*)^T A = y^T D, \quad -A x^* = B y$$

Po transpozici první rovnice a následném sečení obou rovnic

$$-(A + A^T) x^* = (B + D^T) y$$

Neznámý vektor x^* je tedy roven

$$x^* = -(A + A^T)^{-1} (B + D^T) y$$

Kvadratická forma je minimální vzhledem k proměnné x tehdy, když $x = x^*$.

Proto x^* je optimální hodnota x , minimalizující kvadratickou formu.

Minimalizaci kvadratické formy vzhledem k x získáme optimální x^*

$$Ax^* = -By$$

Obecné řešení předchozího vztahu je

$$x^* = -A^+By + x^0$$

kde A^+ je pseudoinverze matice A , která vyhovuje vztahu $AA^+A = A$ a vektor x^0 je libovolný vektor z jádra zobrazení A , to je takový vektor, který splňuje rovnici $Ax^0 = 0$.

Protože pro pseudoinverzi platí $A(A^+A - I) = 0$ je vektor x^0 roven

$$x^0 = (A^+A - I)z$$

kde z je libovolný vektor stejné dimenze jako je dimenze vektoru x .

Minimalní hodnota kvadratické formy je

$$J^*(y) = J(x^*, y) = y^T (C - B^T A^+ B) y$$

Předchozí vztahy nejsou vhodné pro numerický výpočet.

Při výpočtu diagonálních prvků matice F se vyskytuje odmocnina, což ztěžuje výpočet. Proto byla vyvinuta jiná faktORIZACE (popsaná později), která nevyžaduje výpočet odmocniny.

Závažnější problém nastane, když diagonální prvek $F_{i,i}$ je roven nule, neboť se jím při výpočtu nedíagonálních prvků matice F dělí.

Choleskyho faktORIZACE není v tomto případě jednoznačná a vždy jednoznačný rozklad dostaneme tím, že je-li některý diagonální prvek matice F nulový, pak položíme rovný nule celý odpovídající řádek matice F .

Vztah pro mimodiagonální prvky $F_{i,j}$ doplníme podmínkou

$$\text{jestliže } F_{i,i} = 0, \text{ pak } F_{i,j} = 0, \forall j > i.$$

Pro rozkladu matice M provedeme minimalizaci kvadratické formy i výpočet optimálního x .

$$J(x, y) = [x^T y^T] M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x^T y^T] F^T F \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left\| F \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|^2$$

Horní trojúhelníkovou matici F rozložíme na submatice

$$F = \begin{bmatrix} F_x & F_{x,y} \\ 0 & F_y \end{bmatrix}$$

kde dimenze rozkladu odpovídají dimenzi vektorů x a y . Kvadratická forma je

$$J(x, y) = \left\| \begin{bmatrix} F_x & F_{x,y} \\ 0 & F_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|^2 = \|F_x x + F_{x,y} y\|^2 + \|F_y y\|^2$$

Zobecněná Choleskyho faktORIZACE

Standardní Choleskyho faktORIZACE je rozklad (faktORIZACE) libovolně pozitivně definitní matice M do tvaru

$$M = F^T F,$$

kde F je reálná horní trojúhelníková matice, $F_{i,j} = 0$ pro $i > j$.

FaktORIZACE pozitivně definitní matice M je jediná až na znaménko každého řádku matice F .

FaktORIZACE je jediná omezená-li se podmínkou, že diagonální prvky matice F jsou kladné.

Je-li matice M pouze pozitivně semidefinitní není Choleskyho faktORIZACE jednoznačná.

Jedná se o zobecněnou Choleskyho faktORIZACI.

Pro $i \leq j$ platí pro jednotlivé prvky matice M vztah

$$M_{i,j} = \sum_{k=1}^i F_{k,i} F_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} F_{k,i} F_{k,j} + F_{i,i} F_{i,j}$$

Z předchozího vztahu pro prvky matice M plyne algoritmus výpočtu prvků Choleskyho rozkladu F .

Pro $i = 1, 2, \dots$ postupně počítáme nejprve diagonální prvky matice F

$$F_{i,i} = \sqrt{M_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} F_{k,i}^2}$$

a potom jednotlivé prvky matice F vpravo od diagonály

$$F_{i,j} = \frac{1}{F_{i,i}} \left[M_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} F_{k,i} F_{k,j} \right], \quad j > i.$$

Minimum kvadratické formy vzhledem k proměnné x nastane když první člen na pravé straně předchozího výrazu bude roven nule.

$$F_x x^* + F_{x,y} y = 0$$

Při výpočtu x^* využijeme toho, že matice F_x je horní trojúhelníková matice.

Je-li pro některé i diagonální prvek matice F_x nulový, pak je podle předchozího nulový celý i -tý řádek této matice.

Proto odpovídající složka x_i^* optimálního vektoru může být zvolena libovolně.

Pro výpočet optimálního x^* stačí provést faktORIZACI pouze horní části matice M , která je potřebná pro získání submatice F_x a $F_{x,y}$.

Minimální hodnota kvadratické formy je

$$J^*(y) = J(x^*, y) = \|F_x y\|^2 = y^T F_y^T F_y y$$

Provedeme úpravu kvadratické formy. Matici M vyjádříme pomocí submatic Choleskyho faktorů, pak

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} = F^T F = \begin{bmatrix} F_x & F_{x,y} \\ 0 & F_y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_x & F_{x,y} \\ 0 & F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x^T F_x & F_x^T F_{x,y} \\ F_{x,y}^T F_x & F_{x,y}^T F_{x,y} + F_y^T F_y \end{bmatrix}$$

Odtud plyne, že matice C je rovna

$$C = F_y^T F_y + F_{x,y}^T F_{x,y}$$

Proto optimální hodnotu kvadratické formy můžeme vyjádřit ve tvaru

$$J^*(y) = y^T F_y^T F_y y = y^T (C - F_{x,y}^T F_{x,y}) y$$

Proto i při výpočtu minima kvadratické formy opět není třeba provádět úplnou faktorizaci matice F .

Po nalezení rozkladu provedeme minimalizaci kvadratické formy

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} x^T & y^T \end{bmatrix} U^T D U \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Provedeme rozklad U i vektoru d tvořícího digonálu diagonální matice D

$$U = \begin{bmatrix} U_x & U_{x,y} \\ 0 & U_y \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$

Potom kvadratická forma

$$\begin{aligned} J(x, y) &= \begin{bmatrix} x^T & y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x & U_{x,y} \\ 0 & U_y \end{bmatrix}^T \text{diag} \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} U_x & U_{x,y} \\ 0 & U_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= [U_x x + U_{x,y} y]^T \text{diag} (d_x) [U_x x + U_{x,y} y] + y^T U_y^T \text{diag} (d_y) U_y y \end{aligned}$$

Minimum vzhledem k x je

$$U_x x^* + U_{x,y} y = 0$$

Jestliže i -tý diagonální prvek d_x je nulový ($(d_x)_i = 0$), pak příslušná složka x_i^* může být volena libovolně. Volba x_i^* potom ale ovlivňuje další složky x_j^* pro $j < i$.

Minimum kvadratické formy je jediné a je rovno

$$J(x^*, y) = y^T U_y^T \text{diag} (d_y) U_y y = y^T (C - U_{x,y}^T \text{diag} (d_x) U_{x,y}) y$$

LDU faktorizace

Matici M faktorizujeme $M = U^T D U$

kde U je monická horní trojúhelníková matice (monická znamená, že má jednotkovou diagonálu).

Matice $D = \text{diag} (d)$ je diagonální matice (v její diagonále je vektor d).

Někdy se tento rozklad píše ve tvaru $M = L D L^T$, kde L je monická dolní trojúhelníková matice.

Schematické vyjádření

$$M = \begin{bmatrix} d & U \end{bmatrix} \quad \text{nebo} \quad M = \begin{bmatrix} d & L^T \end{bmatrix}$$

Pro $i \leq j$ platí

$$M_{i,j} = \sum_{k=1}^i U_{k,i} d_k U_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} U_{k,i} d_k U_{k,j} + U_{i,i} d_i U_{i,j}$$

Pro $i = 1, 2, \dots$ postupně počítáme nejprve prvky diagonální matice. Pro $j = i$ platí

$$d_i = M_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} d_k U_{k,i}^2$$

Je-li $d_i = 0$, pak je nulový celý odpovídající řádek matice U , čili if $d_i = 0$ then $U_{i,j} = 0 \quad \forall j > i$.

Pro nenulové prvky d_i počítáme prvky v odpovídajícím řádku matice U

$$U_{i,j} = \frac{1}{d_i} \left(M_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} d_k U_{k,i} U_{k,j} \right)$$

Příklad na užití LDL^T faktorizace:

KALMANŮV FILTR

Odhad stavu lineárního diskrétního systému ze změřených hodnot výstupu a vstupu (z dat).

Stavové rovnice lineárního diskrétního systému

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + v(t), & v(t) &\sim \mathcal{N}(0, R_v) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + e(t), & e(t) &\sim \mathcal{N}(0, R_e) \end{aligned}$$

Data

$$\mathcal{D}^t = \{y(t), u(t), y(t-1), u(t-1), \dots\}$$

Odhad stavu v čase t , podmíněný daty až do času τ

$$x(t|\tau) \sim \mathcal{N}(\hat{x}(t|\tau), R_{xx}(t|\tau))$$

Postupně jak přicházejí nová data, získáváme

$$\begin{aligned} \hat{x}(t|t-1) &\longrightarrow \hat{x}(t|t) \longrightarrow \hat{x}(t+1|t) \longrightarrow \dots \\ R_{xx}(t|t-1) &\longrightarrow R_{xx}(t|t) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Postupně následují datový krok (filtrace) $\hat{x}(t|t-1) \longrightarrow \hat{x}(t|t)$ a predikční krok (predikce) $\hat{x}(t|t) \longrightarrow \hat{x}(t+1|t)$

FILTRACE

$$\begin{aligned}\hat{x}(t|t) &= \hat{x}(t|t-1) + R_{xy}(t|t-1)R_{yy}^{-1}(t|t-1)(y(t) - \hat{y}(t|t-1)) \\ R_{xx}(t|t) &= R_{xx}(t|t-1) - R_{xy}(t|t-1)R_{yy}^{-1}(t|t-1)R_{yx}(t|t-1) \\ \hat{y}(t|t-1) &= C\hat{x}(t|t-1) + Du(t)\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}R_{xy}(\cdot, \cdot) &= R_{xx}(\cdot, \cdot)C^T \\ R_{yy}(\cdot, \cdot) &= CR_{xx}(\cdot, \cdot)C^T + R_e\end{aligned}$$

PREDIKCE

$$\begin{aligned}\hat{x}(t+1|t) &= A\hat{x}(t|t) + Bu(t) \\ R_{xx}(t+1|t) &= AR_{xx}(t|t)A^T + R_e\end{aligned}$$

Důkaz:

Pro celkovou kovarianční matici platí

$$R_c = \begin{bmatrix} P & PK^T \\ KP & LD_x L^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \text{diag}(d_1)L_1^T & L_1 \text{diag}(d_1)G^T \\ G\text{diag}(d_1)L_1^T & G\text{diag}(d_1)G^T + L_2 \text{diag}(d_2)L_2^T \end{bmatrix}$$

Proto $P = L_1 \text{diag}(d_1)L_1^T$, $PK^T = L_1 \text{diag}(d_1)G^T$.

Odtud $PK^T = L_1 \text{diag}(d_1)G^T = \underbrace{L_1 \text{diag}(d_1)L_1^T (L_1^T)^{-1} G^T}_{P} \underbrace{(L_1^T)^{-1} G^T}_{K^T}$, proto $K = GL_1^{-1}$.

Platí $K = R_{xx}C^T P^{-1}$, proto $CR_{xx} = PK^T$. Odtud

$$R_{xx}(t|t) = R_{xx}1 - KCR_{xx}(t|t-1) = G\text{diag}(d_1)G^T + L_2 \text{diag}(d_2)L_2^T - \underbrace{GL_1^{-1}L_1 \text{diag}(d_1)G^T}_{K} \underbrace{CR_{xx}(t|t-1)}_{LD_1 L^T = R_{xx}(t|t-1)} = L_2 \text{diag}(d_2)L_2^T$$

Vzťah pro predikovanou střední hodnotu dokážeme snadno

$$\hat{x}(t|t) = \hat{x}(t|t-1) + Gs = \hat{x}(t|t-1) + \underbrace{G(L_1)^{-1}}_K (y(t) - C\hat{x}(t|t-1) - Du(t))$$

Filtrace pomocí LDL^T faktorizace

Všechny kovarianční matice ve faktorizovaném tvaru

$$R_e = L_e D_e L_e^T, \quad R_v = L_v D_v L_v^T, \quad R_{xx}(t|t-1) = LD_x L^T$$

Potom platí

$$p \begin{bmatrix} y(t|t-1) \\ x(t|t-1) \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left[\begin{bmatrix} C\hat{x}(t|t-1) + Du(t) \\ \hat{x}(t|t-1) \end{bmatrix}; R_c = \begin{bmatrix} CLD_x L^T C^T + R_e & CLD_x L^T \\ LD_x L^T C^T & LD_x L^T \end{bmatrix} \right]$$

Matici R_c nejprve vyjádřím (není to ještě faktorizovaný tvar)

$$R_c = \begin{bmatrix} CLD_x L^T C^T + R_e & CLD_x L^T \\ LD_x L^T C^T & LD_x L^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_e & CL \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_e & 0 \\ 0 & D_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_e^T & 0 \\ L^T C^T & L^T \end{bmatrix}$$

Zavedu Kalmanův zisk K a pomocnou matici P

$$P = (CRC^T + R_e), \quad K = RC^T (CRC^T + R_e)^{-1} = RC^T P^{-1}, \quad \text{pak} \quad RC^T = KP$$

Proto R_c je rovno (a po faktorizaci)

$$R_c = \begin{bmatrix} P & PK^T \\ KP & LD_x L^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ G & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{diag}(d_1) & 0 \\ 0 & \text{diag}(d_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1^T & G^T \\ 0 & L_2^T \end{bmatrix}$$

Potom pro filtraci platí

$$R_{xx}(t|t) = L_2 \text{diag}(d_2)L_2^T$$

$$\hat{x}(t|t) = \hat{x}(t|t-1) + Gs, \quad \text{kde } s \text{ je řešením} \quad L_1 s = y(t) - C\hat{x}(t|t-1) - Du(t)$$

Predikce pomocí $LD_x L^T$ faktorizace

$$\begin{aligned}\hat{x}(t+1|t) &= A\hat{x}(t|t) + Bu(t) \\ R_{xx}(t+1|t) &= AR_{xx}(t|t)A^T + R_e\end{aligned}$$

Střední hodnotu počítám přímo.

Kovarianční matice vyjádřím ve faktorizovaném tvaru $R_{xx}(t|t) = LD_x L^T$, $R_e = L_e D_e L_e^T$. Pak

$$R_{xx}(t+1|t) = AR_{xx}(t|t)A^T + R_e = \begin{bmatrix} AL & L_v \end{bmatrix} \text{diag} \begin{bmatrix} D_x \\ D_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^T A^T \\ L_v^T \end{bmatrix}$$

Po faktorizaci dostaneme přímo výsledek

$$R_{xx}(t+1|t) = \begin{bmatrix} L_p & 0 \end{bmatrix} \text{diag} \begin{bmatrix} D_p \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_p^T \\ 0 \end{bmatrix} = L_p D_p L_p^T$$

Aktualizace Choleskyho faktoru

Máme tedy lineární rovnici ve tvaru $Ax - b \doteq 0$.

Vektor chyby této rovnice zapíšeme ve tvaru $e = [A - b] \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$

Minimalizace kvadrátu normy vektoru e vede na minimalizaci kvadratické formy

$$J(x) = e^T e = \begin{bmatrix} x^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

Provedeme faktorizaci matice dat $H = \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}$. Potom platí $H^T H = F^T F$, kde Choleskyho faktor F je čtvercová horní trojúhelníková matice.

Nová data:

Po provedené faktorizaci matice dat dostaneme nová měření vedoucí na další lineární rovnici $\alpha x - \beta = 0$,

kde řádkový vektor α a konstanta β obsahují nová data.

Přidáním nově získané lineární rovnice k předchozí soustavě dostaneme nový tvar kvadratické formy

$$J(x) = \begin{bmatrix} x^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -b \\ \alpha & -\beta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & -b \\ \alpha & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ortogonalní matice je taková matice, pro kterou platí $T^T T = I$. Matici T volíme takovou, aby

$$T \begin{bmatrix} \varphi F \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Potom

$$M = \begin{bmatrix} \varphi F \\ h \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varphi F \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi F \\ h \end{bmatrix}^T T^T T \begin{bmatrix} \varphi F \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{F} \\ 0 \end{bmatrix} = \tilde{F}^T \tilde{F}$$

Přitom předpokládáme, že matice F je horní trojúhelníková matice.

Triangulizaci provádíme sekvencně nejprve vynulujeme první prvek posledního řádku vhodně zvolenou ortogonální maticí T , potom vynulujeme druhý prvek posledního řádku atd.

Při tom matice F mění koeficienty a postupně se mění na horní trojúhelníkovou matici $\tilde{F}$.

Postup ukážeme při nulování i -tého prvku posledního řádku, to je při (i) -té iteraci

Pomocí matice dat H a řádkového vektoru nových dat $h = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \end{bmatrix}$ vyjádříme aktualizovanou kvadratickou formu

$$J(x) = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H \\ h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^T H + h^T h \\ H^T h + h^T h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

Protože platí $H^T H = F^T F$ pak nová matice kvadratické formy je

$$M = H^T H + h^T h = F^T F + h^T h$$

Aktualizace Choleskyho faktoru spočívá ve výpočtu nového Choleskyho faktoru $\tilde{F}$ podle vztahu

$$M = F^T F + h^T h = \tilde{F}^T \tilde{F}$$

kde $\tilde{F}$ je opět horní trojúhelníková matice.

Navíc často chceme stará data nějakým způsobem "znevážit", nebo "zapomenout" a proto matici "starých" dat H respektive její Choleskyho faktor F násobíme číslem $0 < \varphi < 1$, které nazýváme **faktor zapominání**.

Aktualizace Choleskyho faktoru potom vede na výpočet čtvercové horní trojúhelníkové matice $\tilde{F}$ pro kterou platí

$$\tilde{F}^T \tilde{F} = \begin{bmatrix} \varphi F \\ h \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varphi F \\ h \end{bmatrix} = \varphi^2 F^T F + h^T h.$$

Triangulizace matice (to je úprava matice na horní trojúhelníkový tvar) se provádí pomocí speciální **ortogonální matice** T , zvané **matice planárních rotací**, nebo také **Givensova rotace**.

Ortogonalní matice T je v tomto případě rovna

$$T = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & c_i & s_i \\ & & & -s_i & c_i \end{bmatrix}$$

Ortogonalní matice T je rovna jednotkové matici s výjimkou prvků $T_{i,i} = c_i$, $T_{i,\nu} = s_i$, $T_{\nu,i} = -s_i$ a $T_{\nu,\nu} = c_i$, kde ν je dimenze matice T .

Abychy matice T byla ortogonální, musí být koeficienty c_i a s_i omezeny vztahem $c_i^2 + s_i^2 = 1$.

Násobíme-li takovou ortogonální maticí matici $\begin{bmatrix} F \\ h \end{bmatrix}$, pak se ve výsledné matici znění pouze i -tý a poslední ν -tý řádek.

Pro tyto řádky platí

$$T \begin{bmatrix} F \\ h \end{bmatrix}_{i,\nu} = \begin{bmatrix} c_i & \dots & s_i \\ \dots & \dots & \dots \\ -s_i & \dots & c_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots & 0 & F_{i,i+1} & \dots & F_{i,\nu} \\ \dots & \dots & h_{i+1}^{(i-1)} & \dots & h_{i+1}^{(i-1)} \\ \dots & 0 & 0 & h_{i+1}^{(i)} & \dots & h_{i+1}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & 0 & \tilde{F}_{i,i+1} & \dots & \tilde{F}_{i,\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \tilde{h}_{i+1}^{(i)} & \dots & \tilde{h}_{i+1}^{(i)} \end{bmatrix}$$

kde horním indexem v závorce jsme označili krok (iteraci) algoritmu. Protože chceme nulovat i -tý prvek posledního řádku,

musí platit $h_i^{(i)} = -s_i F_{i,i} + c_i h_i^{(i-1)} = 0$. Odtud plynou vztahy pro prvky c_i a s_i ortogonální matice T

$$c_i = \frac{F_{i,i}}{\sqrt{(F_{i,i})^2 + (h_i^{(i-1)})^2}}, \quad s_i = \frac{h_i^{(i-1)}}{\sqrt{(F_{i,i})^2 + (h_i^{(i-1)})^2}}$$

Jediná potřeba nastala, pokud by jmenovatel v obou předchozích výrazech byl roven nule. To ale může nastat pouze tehdy, když bude prvek $h_i^{(i-1)} = 0$.

kde vektory f_i a f_j jsou rovny

$$f_i^T = \begin{bmatrix} 0, & \dots, & 0, & 1, & f_{i,i+1}, & \dots, & f_{i,\nu} \end{bmatrix}$$

$$f_j^T = \begin{bmatrix} 0, & \dots, & 0, & f_{j,i}, & f_{j,i+1}, & \dots, & f_{j,\nu} \end{bmatrix}$$

a g_i i g_j jsou nezáporné konstanty.

Naším záměrem je provést modifikaci předchozích dyád tak, aby prvek $f_{i,i}$ vektoru první dyády zůstal roven jedné a prvek $f_{j,i}$ vektoru druhé dyády se vynuloval a nulové prvky v obou vektorech se nezměnily. Modifikace má tedy tvar

$$M^{(i,j)} = u_i d_i u_i^T + u_j d_j u_j^T$$

kde nové vektory u_i a u_j jsou rovny

$$u_i^T = \begin{bmatrix} 0, & \dots, & 0, & 1, & u_{i,i+1}, & \dots, & u_{i,\nu} \end{bmatrix}$$

$$u_j^T = \begin{bmatrix} 0, & \dots, & 0, & 0, & u_{j,i+1}, & \dots, & u_{j,\nu} \end{bmatrix}$$

a d_i i d_j jsou nezáporné konstanty.

Aktualizace LDU faktorů

Zobecnění: Transformace matice F a diagonální matice $G = \text{diag}(g)$ na monickou horní trojúhelníkovou matici U a diagonální matici $D = \text{diag}(d)$

$$M = F^T G F = U^T D U$$

Aktualizaci "starého" rozkladu novými daty obsaženými v matici dat h

$$F = \begin{bmatrix} U_s & \\ & h \end{bmatrix}, \quad G = \text{diag} \begin{pmatrix} \varphi^2 d_s & \\ & 1 \end{pmatrix},$$

kde U_s je horní trojúhelníková matice "starého" rozkladu,

d_s je vektor v diagonále diagonální matice D "starého" rozkladu a

φ je koeficient zaponínání starých dat.

Dyáda - matice vzniklá násobením dvou vektorů, např. $f \alpha f^T$, kde f je sloupkový vektor a α je skalár. Dyáda je matice, která má hodnotu nejvýše jedna.

Matice dat M - součet dyád

$$M = \sum_{i=1}^{\nu} f_i g_i f_i^T = \sum_{i=1}^{\nu} u_i d_i u_i^T$$

kde f_i^T a u_i^T jsou i -té řádky matic F a U a g_i , d_i jsou i -té diagonální prvky diagonálních matic G a D .

Z předchozího součtu všech dyád uvažujeme dále pouze součet dvou dyád

$$M^{(i,j)} = f_i g_i f_i^T + f_j g_j f_j^T$$

Modifikaci součtu dvou dyád provedeme pomocí **algoritmu dyadické redukce**. Prvky modifikovaných dyád jsou rovny

$$d_i = g_i + (f_{j,i})^2 g_j$$

$$d_j = \left(\frac{g_i}{d_i} \right) g_i$$

$$\mu = \left(\frac{g_j}{d_i} \right) f_{j,i}$$

$$u_{j,k} = f_{j,k} - f_{j,i} f_{i,k}, \quad k = i+1, \dots, \nu$$

$$u_{i,k} = f_{i,k} + \mu u_{j,k}, \quad k = i+1, \dots, \nu$$

Odvodění předchozích vztahů viz skript

Dekompozice podle singulárních čísel

Tato dekompozice se často označuje zkratkou SVD podle anglického názvu Singular Value Decomposition.

Mějme matici $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, jejíž hodnota je $\text{hod}(A) = r$.

Pak existují unitární matice $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$ a $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ pro které platí $U^H U = I$, $V^H V = I$, že platí SVD

$$A = U \Sigma V^H, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kde

$$\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r), \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

σ_i jsou nenulová singulární čísla matice A . Unitární matice jsou po sloupcích

$$U = [u_1, \dots, u_m], \quad V = [v_1, \dots, v_n]$$

kde u_i a v_i jsou levé a pravé singulární vektory odpovídající singulárním číslům σ_i .

$$A = U_1 \Sigma_r V_1^H = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^H, \quad U = [U_1, \quad U_2], \quad V = [V_1, \quad V_2]$$

kde $U_1 \in \mathbb{R}^{m \times r}$ a $V_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$. Součiny $u_i v_i^H$ jsou dyády (matice hodnosti 1).

Úplný tvar singulární dekompozice $A = U \Sigma V^H$, zkrácený tvar singulární dekompozice $A = U_1 \Sigma_r V_1^H$.

QR dekompozice

Věta: QR dekompozice

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kde $m \geq n$. Potom existuje ortogonální matice $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$, že

$$A = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix},$$

kde R je horní trojúhelníková matice s nezápornými diagonálními prvky.

Matice R se nazývá R -faktor matice A .

Ortogonální matice je reálná matice, pro kterou platí $Q^T Q = I$

Matice R má stejná singulární čísla a pravé singulární vektory jako matice A .

Pokud $\text{hod}(A) = n$, pak matice R je rovna Choleskymu faktoru matice $A^T A$, platí totiž

$$A^T A = \begin{bmatrix} R^T & 0 \end{bmatrix} Q^T Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = R^T R$$

SVD nám dá informaci o čtyřech základních podprostorech odpovídajících matici A .

$$\mathcal{N}(A) = \text{span}\{v_{r+1}, \dots, v_n\}, \quad \mathcal{R}(A) = \text{span}\{u_1, \dots, u_r\}$$

$$\mathcal{R}(A^H) = \text{span}\{v_1, \dots, v_r\}, \quad \mathcal{N}(A^H) = \text{span}\{u_{r+1}, \dots, u_m\}$$

Samozřejmě platí $\mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{R}(A^H)$, $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^H)$. Platí

$$A^H A = (U \Sigma V^H)^H (U \Sigma V^H) = V \Sigma^2 V^H$$

$$A A^H = U \Sigma^2 U^H$$

Proto $\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2$ jsou nenulová vlastní čísla Hermitovské pozitivně semidefiniční matice $A^H A$ a $A A^H$.

Vektory v_i resp. u_i jsou odpovídající vlastní vektory matic $A^H A$ resp. $A A^H$.

Kvadratická nebo-li spektrální norma matice A je rovna maximálnímu singulárnímu číslu této matice $\|A\|_2 = \sigma_1$.

Platí tedy důležitý vztah

$$\sigma_1 = \left(\lambda_{\max} \{A^H A\} \right)^{1/2} = \|A\|_2.$$

Matice U^H je Hermitovsky sdružená k matici U , to znamená, že je transponovaná a komplexní prvky jsou komplexně sdružené.

Protože pro unitární matice U platí $U^H U = I$, pak zřejmě pro unitární matice také platí $U^{-1} = U^H$ a $\det(U) = 1$.

Sloupce reálné unitární matice jsou ortogonální.

Pokud $\text{hod}(A) = r < n$, pak QR dekompozice není jediná a platí

$$A \Pi = Q \begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kde Π je permutační matice (má v každém sloupci i řádku jedinou jednotku a platí pro ni $\Pi \Pi^T = I$) a matice $R_{1,1} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ je čtvercová horní trojúhelníková matice s kladnými diagonálními prvky, jejíž rozměr je roven hodnotě matice A .

Tato dekompozice se nazývá **QR dekompozice odhalující hodnotnost matice** (Rank Revealing QR Decomposition).

Nejmenší čtverce a QR dekompozice

Protože ortogonální matice zachovává kvadratickou normu, pak $\min_x \|Ax - b\|_2$ je stejné jako $\min_x \|Q^T (Ax - b)\|_2$.

S použitím QR dekompozice matice A dostaneme

$$\min_x \left(\|Ax - b\|_2 \right) = \min_x \left\{ \left\| \begin{bmatrix} Rx \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_1^T b \\ Q_2^T b \end{bmatrix} \right\|_2 \right\} = \min_x \left\{ \left\| \begin{bmatrix} Rx - Q_1^T b \\ Q_2^T b \end{bmatrix} \right\|_2 \right\}$$

kde matice $Q = [Q_1 \quad Q_2]$ je rozdělena na dvě submatice.

Odtud zřejmě plyne

$$\min_x \|Ax - b\|_2 = \|Q_2^T b\|_2, \quad x^* = \arg \min_x \|Ax - b\|_2 = R^{-1} Q_1^T b$$

Vektorové a maticové normy

Norma vektoru x , kterou budeme značit $\|x\|$ je zobrazení $C^n \rightarrow R$, které má následující vlastnosti

- $\|x\| > 0$, $\forall x \in C^n$, $x \neq 0$, (pozitivní definitnost)
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\forall \alpha \in C$, (homogenita)
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (trojúhelníková nerovnost).

Hölderova p norma je

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Důležité jsou speciální případy norem

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= |x_1| + \dots + |x_n| \\ \|x\|_2 &= (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2} \\ \|x\|_\infty &= \max_i |x_i| \end{aligned}$$

Při tom platí Hölderova nerovnost

$$|x^T y| \leq \|x\|_p \|y\|_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Minimalizace p normy

Minimalizace Hölderovy p normy $\min \|Ax - b\|_p$.

Uvedeme výsledky pouze pro skalární případ.

Odhadujeme tedy jednu skalární veličinu α z m pozorování $b \in R^n$.

To znamená, že minimalizujeme $\|Ax - b\|_p$ pro $A = [1, 1, \dots, 1]^T$.

Pokud srovnáme jednotlivá pozorování podle velikosti, že platí $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_m$, pak pro různé normy p je výsledek minimalizace α_p roven

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= b_{(m+1)/2}, \quad m \text{ liché} \\ \alpha_2 &= (b_1 + \dots + b_m) / m \\ \alpha_\infty &= \frac{b_1 + b_m}{2} \end{aligned}$$

α_1 je medián - tento odhad je necitlivý k extrémním hodnotám pozorování, je tedy necitlivý k velkým chybám.

α_2 je rovno střední hodnotě - nejčastější případ.

α_∞ je rovno střednímu rozsahu, je tedy založeno na extrémních hodnotách pozorování, které jsou nejčastěji zatíženy největší chybou.

Tato norma se v minimalizacích používá, protože nás zajímá uje proti největším chybám - je nejvíce konzervativní.

Maticová norma může být konstruována z libovolné vektorové normy podle vztahu

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Pro libovolnou maticovou normu, která je odvozena z vektorové normy platí, že norma jednotkové matice je rovna jedné $\|I\|_p = 1$. Vztahy pro $\|A\|_p$ jsou známy pouze pro $p = 1, 2, \infty$.

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \\ \|A\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \\ \|A\|_2 &= \sigma_1(A) \end{aligned}$$

Maticová norma $\|A\|_1$ je sloupcová norma a je rovna maximálnímu součtu absolutních hodnot prvků ve sloupci.

Maticová norma $\|A\|_\infty$ je řádková norma a je rovna maximálnímu součtu absolutních hodnot prvků v řádku.

Kvadratická nebo také **spektrální norma** $\|A\|_2$ je rovna maximálnímu singulárnímu číslu matice.

NELINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ

ANALYTICKÉ METODY

Za uvedených předpokladů existují tedy body x_{max} a x_{min}

$$f(x_{max}) = \max_{x \in X} f(x) = \sup_{x \in X} f(x), \quad x_{max} = \arg \max_{x \in X} f(x)$$
$$f(x_{min}) = \min_{x \in X} f(x) = \inf_{x \in X} f(x), \quad x_{min} = \arg \min_{x \in X} f(x)$$

Bod extrémní funkce (v dalším vždy minimum) značíme x^* .

Definice: Relativní (lokální) minimum.

Bod $x^* \in X$ je bodem relativního (lokálního) minima funkce $f(x)$ na množině X , jestliže existuje $\epsilon > 0$, že platí $f(x) \geq f(x^*)$ pro všechna $x \in X$, pro která platí $|x - x^*| < \epsilon$ (bod x leží v ϵ -okolí bodu x^*).
Pokud v ϵ -okolí platí ostrá nerovnost $f(x) > f(x^*)$ pro $x \neq x^*$, pak x^* je bodem ostrého relativního minima funkce f na množině X .

Definice: Globální minimum.

Bod $x^* \in X$ je bodem globálního minima funkce $f(x)$ na množině X , jestliže platí $f(x) \geq f(x^*)$ pro všechna $x \in X$.
Pokud pro všechna $x \in X$ a $x \neq x^*$ platí ostrá nerovnost $f(x) > f(x^*)$, pak x^* je bodem ostrého globálního minima funkce f na množině X .

Většina algoritmů nám umožní nalézt pouze lokální extrém. Globální extrémny nalezneme pouze za určitých předpokladů o konvexnosti problému.

Nelineární programování

Optimalizační problémy, u nichž modelem situace je statický systém.
Metody hledání extrémů funkcí více proměnných, které podléhají různým omezením.
Statické optimalizace. Parametrické optimalizace, úlohy matematického programování.

Klasifikace úloh matematického programování

Základní úloha matematického programování je tedy

$$\min \{ f(x) : x \in X \subset E^n \}$$

kde E^n je n -rozměrný Eukleidův prostor.

Je hostejné, zda se jedná o maximum či minimum, neboť platí

$$\min \{ f(x) : x \in X \} = - \max \{ -f(x) : x \in X \}$$

Existenci extrémů zajišťuje Weierstrassova věta:

Věta: Každá spojitá funkce $f(x)$ definovaná na kompaktní (ohrazené a uzavřené) množině $X \subset E^n$, má na ní maximální i minimální hodnotu.

Pokud omezující množina $X = E^n$, pak problém určení *volného* extrém.

Omezení jsou často určena soustavou rovnic

$$X = \{ x : x \in E^n, h_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m \}$$

Problém na vázaný extrém v užším smyslu.

Obecná úloha nelineárního programování - minimalizovaná funkce $f(x)$ je nelineární a omezení jsou určena soustavou rovnic i nerovnic.

$$X = \{ x : x \in E^n; h_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m; g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, p \}$$

Každou rovnost $h(x) = 0$ můžeme nahradit dvěma nerovnicemi: $h(x) \leq 0$ a $-h(x) \leq 0$.

Každou nerovnici $g_j(x) \leq 0$ nahradit rovnicí $g_j(x) + y^2 = 0$, kde y je pomocná proměnná.

Přitom ale množina X , daná soustavou rovnic, nemá vnitřní body, to znamená, že v každém okolí bodu $x \in X$ jsou body, které do množiny X nepatří.

Každou účelovou funkci lze převést na lineární účelovou funkci.

$$\min \{ f(x) : x \in E^n, h_i(x) = 0, g_j(x) \leq 0 \}$$

$$\min \{ y : f(x) - y \leq 0 : x \in E^n, y \in E^1, h_i(x) = 0, g_j(x) \leq 0 \}$$

Někdy požadujeme, aby některé nebo všechny proměnné nabývaly pouze celočíselných hodnot - **celočíslné programování**.

Speciální případ celočíselného programování je **binární programování**, kde proměnné nabývají pouze dvou hodnot, často 0 nebo 1.

Přípustné směry - volný extrém

Optimalizační problém $\min \{f(x) : x \in X \subset \mathbb{R}^n\}$.

Definice: Mějme bod $x \in X$, pak vektor s je *přípustný směr* v bodě x , jestliže existuje $\beta > 0$, že

$$x + \alpha s \in X \quad \text{pro všechny } \alpha; \quad 0 \leq \alpha \leq \beta$$

Podmínky prvního řádu

Je-li x^* bodem relativního minima, pak nemůže existovat takový přípustný směr, že v bodě $x = x^* + \alpha s$ nabývá funkce menších hodnot.

$$f(x) \geq f(x^*),$$

Při aproximaci prvního řádu funkce bodě x^*

$$f(x) \doteq f(x^*) + \frac{\partial f(x^*)}{\partial x} (x - x^*) = f(x^*) + \alpha \frac{\partial f(x^*)}{\partial x} s = f(x^*) + \nabla f(x^*)^T s.$$

Nutná podmínka minima.

Věta: Je-li x^* bodem relativního minima funkce $f(x) \in C^1$

($f \in C^1$ znamená, že funkce f má spojitě první parciální derivace)

na množině X , pak pro libovolný vektor s , který je přípustným směrem v bodě x^* platí

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x} s = \nabla f(x^*)^T s \geq 0.$$

Podmínky druhého řádu

Aproximace druhého řádu funkce f v bodě x^* .

$$f(x) \doteq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*) + \frac{1}{2} (x - x^*)^T \nabla^2 f(x^*) (x - x^*) = f(x^*) + \alpha \nabla f(x^*)^T s + \frac{1}{2} \alpha^2 s^T \nabla^2 f(x^*) s$$

Druhá derivace skalární funkce $f(x)$ podle vektorového argumentu x je Hessova matice.

$$H(x) = \nabla^2 f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

Nutné podmínky druhého řádu

Věta: Je-li x^* bodem relativního minima funkce $f(x) \in C^2$

($f \in C^2$ znamená, že funkce f má spojitě i druhé parciální derivace)

na množině X , pak pro libovolný vektor s , který je přípustným směrem v bodě x^* platí

- 1) $\nabla f(x^*)^T s \geq 0$
- 2) Je-li $\nabla f(x^*)^T s = 0$, pak $s^T \nabla^2 f(x^*) s \geq 0$.

Je-li x^* vnitřní bod množiny X ,

pak podmínka 1) $\nabla f(x^*) = 0$ a

podmínka 2) $\nabla^2 f(x^*) \geq 0$ - Hessova matice je pozitivně semidefiniční.

Poznámka: Derivace skalární funkce $f(x)$ podle vektorového argumentu x je řádkový vektor

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right]$$

Gradient skalární funkce $f(x)$ v bodě x je sloupcový vektor

$$\text{grad } f(x) = \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right)^T.$$

Ve vnitřním bodě je přípustný směr libovolný.

Nutné podmínky prvního řádu pro vnitřní bod x^* množiny X :

Věta: Pokud x^* je bod relativního minima funkce $f(x)$ na množině X a x^* je vnitřní bod množiny X , pak

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

KONVEXNOST

Pro nalezení globálních extrémů vyžadujeme konvexnost kritériální funkce a konvexnost omezující množiny.

Množina X je konvexní, když pro libovolné dva body konvexní množiny platí, že celá úsečka mezi těmito body patří do množiny X .

Definice: Funkce f definovaná na konvexní množině X je konvexní, jestliže pro libovolné $x_1, x_2 \in X$ a každé $\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$ platí

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$$

Platí-li ostrá nerovnost (pro $x_1 \neq x_2$), pak funkce je striktně konvexní.

Součet i pozitivní lineární kombinace konvexních funkcí je funkce konvexní.

Je-li $h(x)$ konvexní funkce, pak množina X určená nerovností

$$X = \{x : h(x) \leq b\}$$

je konvexní pro libovolné reálné b .

Předchozí tvrzení platí i pro množinu X tvořenou soustavou nerovností ($h_1(x) \leq b_1, \dots, h_m(x) \leq b_m$), kde $h_i(x)$ jsou konvexní funkce.

Konvexní funkce diferencovatelné:

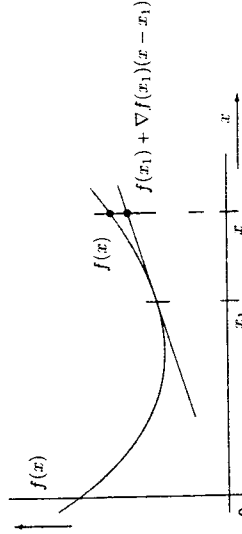
Věta: Je-li $f \in C^1$, pak funkce f je konvexní na konvexní množině X právě tehdy, když

$$f(x) \geq f(x_1) + \nabla f(x_1)^T (x - x_1)$$

pro všechna $x, x_1 \in X$.

Věta: Je-li $f \in C^2$, pak funkce f je konvexní na konvexní množině X obsahující vnitřní bod právě tehdy, když Hessova matice $H(x)$ je pozitivně semidefinitní pro $x \in X$ □

$$H(x) = \nabla^2 f(x) \geq 0 \quad x \in X.$$



Nutné podmínky lokálních extrémů se pro konvexní funkce mění na globální podmínky nutné a postačující.

Věta: Je-li f konvexní funkce definovaná na konvexní množině X , potom množina X^* , na které funkce f dosahuje minima, je také konvexní a libovolné relativní minimum je globální minimum.

Věta: Nechť $f \in C^1$ na konvexní množině X . Je-li $x^* \in X$ a pro všechna $x \in X$ platí $\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \geq 0$, pak x^* je bod globálního minima funkce f na X .

Maximalizace na konvexních funkcích:

Věta: Nechť f je konvexní funkce definovaná na ohraničené, uzavřené konvexní množině X . Má-li f maximum na X , pak toto maximum je dosaženo v krajním bodě množiny X .

Vázané extrém

Minimalizační problémy s funkcionálními omezeními ve tvaru rovnic a nerovnic

$$\min \{f(x) : h_1(x) = 0, \dots, h_m(x) = 0; g_1(x) \leq 0, \dots, g_p(x) \leq 0\}$$

Zavedením vektorových funkcí $h(x) = [h_1, \dots, h_m]^T$, $g(x) = [g_1, \dots, g_p]^T$

$$\min \{f(x) : h(x) = 0; g(x) \leq 0\}$$

Aktivní omezení je to omezení, které se aktivně uplatní, to znamená, že omezení ve tvaru rovnosti je aktivní v každém bodě a omezení $g_i(x) \leq 0$ je aktivní v bodě x , platí-li $g_i(x) = 0$.

Neaktivní omezení (v bodě x platí $g_i(x) < 0$) se neuplatní a můžeme ho tedy ignorovat.

Regulární bod množiny omezení:

Aktivní omezení $h_i(x) = 0$, kterých není m , definují v n -rozměrném prostoru variety.

Jsou-li omezení regulární, pak varieta má dimenzi $n - m$.

V nějakém bodě x^* budeme konstruovat tečnou nadrovinu k varietě $h(x) = 0$.

Podprostor $M = \{y : \nabla h(x^*)^T y = 0\}$ je tečnou nadrovinou pouze tehdy, jsou-li gradienty $\nabla h_i(x)$ lineárně nezávislé.

Omezení typu rovnosti

$$\min \{f(x) : h(x) = 0\}$$

Nutné podmínky prvního řádu:

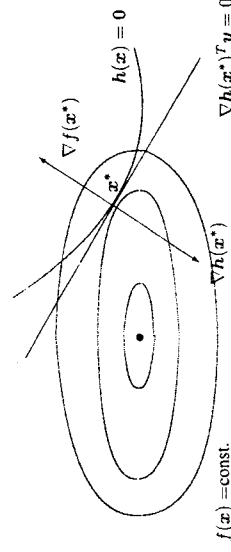
Lemma: Nechť x^* je regulární bod omezení $h(x) = 0$ a je to lokální extrém funkce $f(x)$ vzhledem k omezením.

Pak pro všechna $y \in E^n$ splňující

$$\nabla h(x^*)^T y = 0$$

musí také platit

$$\nabla f(x^*)^T y = 0$$



To znamená, že $\nabla f(x^*)$ je ortogonální k tečné nadrovině - viz obr.

Označme Jacobioho matici $A = \nabla h(x^*)^T$. Tato matice má v regulárním bodě plnou řádkovou hodnotu.

Označme $b = \nabla f(x^*)^T$.

Pak, aby soustavy $Ay = 0$, $by = 0$ měly shodná řešení, musí být vektor b lineární kombinací řádků matice A .

Z toho plyne, že $\nabla f(x^*)$ je lineární kombinací gradientů $h_i(x)$ v bodě x^* .

Věta: Nechtí x^* je bod lokálního extrému $f(x)$ vzhledem k omezením $h(x) = 0$, x^* je regulární bod omezení.

Pak existuje vektor $\lambda \in E^m$ že

$$\nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)\lambda = 0.$$

Lagrangeova funkce $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T h(x)$

Nuné podmínky z předchozí věty tvrdí, že gradient Lagrangeovy funkce vzhledem k x je nulový v bodě x^* a omezující podmínka $h(x) = 0$ je ekvivalentní podmínce nulovosti gradientu Lagrangeovy funkce vzhledem k λ , čili

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x, \lambda) &= \nabla_x f(x) + \nabla_x h(x)\lambda = 0 \\ \nabla_\lambda L(x, \lambda) &= h(x) = 0 \end{aligned}$$

Příklad: Při nesplnění podmínek regularity neplatí nutné podmínky formulované v předchozí větě.

$$\min \{f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 : h_1(x) = (x_1 - 2)^2 - x_2^2 = 0, h_2(x) = x_2 = 0\}.$$

Omezující podmínky určují $x_1 = 2$ a $x_2 = 0$.

Proto globální minimum je $x^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Nuné podmínky nulovosti gradientu Lagrangeovy funkce vzhledem k x_i^*

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tato soustava však nemá řešení pro žádné λ_1 , neboť x^* není regulární bod.

Nuné podmínky druhého řádu:

Věta: Nechtí x^* je bod lokálního minima $f(x)$ vzhledem k omezením $h(x) = 0$ a x^* je regulární bod omezení.

Pak existuje vektor $\lambda \in E^m$, že jsou splněny nutné podmínky prvního řádu $\nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)\lambda = 0$.

Je-li M tečná rovina k omezením v bodě x^* , $M = \{y : \nabla h(x^*)^T y = 0\}$, pak Hessova matice

$$H(x^*) = \nabla^2 L = \nabla^2 f(x) + \nabla^2 h(x^*)\lambda$$

je pozitivně semidefnitní na M , to je

$$y^T H(x^*) y \geq 0, \quad \forall y \in M$$

Výraz $\nabla^2 h(x^*)$, který se vyskytuje v Hessově matici, je tříznamenný tenzor.

Proto druhý člen v Hessově matici vyjádříme ve tvaru

$$\nabla^2 h(x^*)\lambda = \sum_{i=1}^m \nabla_x^2 h_i(x^*)\lambda_i$$

Při tom $\nabla_x^2 h_i(x)$ je matice.

Postačující podmínky dostaneme zesílením nutných podmínek druhého řádu.

Věta: Nechtí x^* splňuje omezení $h(x^*) = 0$ a existuje λ , že platí $\nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)\lambda = 0$. Dále předpokládáme, že Hessova matice $H(x^*)$ je pozitivně defnítí na tečné nadrovině M .

Pak x^* je bod ostrého lokálního minima funkce $f(x)$ vzhledem k omezením $h(x) = 0$.

Zde není třeba dodávat podmínky regularity.

Příklad: Určete rozměry kvádra (krabice) maximálního objemu. Při tom je dána plocha c materiálu, ze kterého se krabice vyrobí

$$\max \{x y z : 2(xy + xz + yz) = c\}$$

Lagrangeova funkce je rovna $L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(2(xy + xz + yz) - c)$. Nuné podmínky

$$yz + 2\lambda(y + z) = 0$$

$$xz + 2\lambda(x + z) = 0$$

$$xy + 2\lambda(x + y) = 0$$

Řešení $x = y = z$ a z omezující podmínky dostaneme $x = y = z = \sqrt{\frac{c}{6}}$.

Příklad: Rozdělení pravděpodobnosti s maximální entropií.

Mějme tedy náhodnou veličinu x , která nabývá n hodnot $(x_1, \dots, x_n)$, každou s pravděpodobností $(p_1, \dots, p_n)$.

Při tom platí $p_i \geq 0$ a $\sum p_i = 1$. Je dána střední hodnota $\sum x_i p_i = m$ náhodné veličiny x .

Entropie $\mathcal{E}$ náhodného jevu je definována $\mathcal{E} = -\sum p_i \log p_i$.

Lagrangeova funkce pro tuto úlohu je rovna

$$L(p_1, \lambda_1, \lambda_2) = -\sum p_i \log p_i + \lambda_1(\sum p_i - 1) + \lambda_2(\sum x_i p_i - m)$$

Z požadavku nulovosti Lagrangeovy funkce vzhledem k p_i

$$-\log p_i - 1 + \lambda_1 + \lambda_2 x_i = 0$$

Odtud $p_i = e^{\lambda_1 - 1 + \lambda_2 x_i}$, a rozdělení s maximem entropie je exponenciální rozdělení.

Citlivostní věta - stínové ceny

Jak se mění kritérium, pokud měníme omezující podmínky?

Věta: Nechtí $f, h \in C^2$. Mějme problém

$$\min \{f(x) : h(x) = b\} \quad x^*(b) = \arg \min_x \{ \dots \}$$

Pro $b = 0$ je řešení regulární bod x^* a odpovídající λ je Lagrangeův koeficient.

Při tom v bodě x^* jsou splněny postačující podmínky druhého řádu pro ostré lokální minimum.

Potom pro $b \in E^m$ je $x^*(b)$ spojitě závislé na b , takové, že $x^*(0) = x^*$. Potom

$$\nabla_b f(x(b))|_{b=0} = -\lambda$$

Rozbor:

Gradient kritéria vzhledem k vektoru b

$$\nabla_b f(x(b))|_{b=0} = \nabla_b x(b)|_{b=0} \nabla_x f(x)|_{x=x^*}$$

Omezení je $h(x) = b$, proto

$$\nabla_b h(x(b))|_{b=0} = I = \nabla_x x(b)|_{b=0} \nabla_x h(x)|_{x=x^*},$$

kde I je jednotková matice.

Z nulovosti gradientu Lagrangeovy funkce plyne $\nabla_x f(x)|_{x=x^*} + \nabla_x h(x)|_{x=x^*} \lambda = 0$. Proto

$$\nabla_b f(x(b))|_{b=0} = - \underbrace{\nabla_x x(b)|_{b=0} \nabla_x h(x)|_{x=x^*}}_I \lambda = -\lambda$$

Velikost Lagrangeova koeficientu ukazuje, jak rychle se mění kritérium při změně omezení.

Přibližně tedy platí

$$\frac{\Delta f}{\Delta \lambda_i} \approx -\lambda_i$$

Při jednoité změně i -tého omezení se hodnota kritéria změní o $(-\lambda_i)$.

Velikost Lagrangeova koeficientu ukazuje tedy na důležitost příslušného omezení.

Protože často kritérium vyjadřuje cenu, ukazují Lagrangeovy koeficienty na cenu příslušného omezení.

Proto se Lagrangeovy koeficienty nazývají také "stínové ceny".

Je-li nulový některý Lagrangeův koeficient, pak změna příslušného omezení nevyvolá žádnou změnu kritéria.

Toto omezení se nazývá degenerované.

Odvodzení KKT z nutných podmínek pro úlohy s omezením ve tvaru rovnosti:

Zavedeme pomocnou proměnnou y

$$\min \{ f(x) : h(x) = 0 : g(x) + y^{[2]} = 0 \}$$

kde $y^{[2]} = \begin{bmatrix} y_1^2 & y_2^2 & \dots & y_p^2 \end{bmatrix}^T$.
Lagrangeova funkce

$$\bar{L}(x, y, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^T h(x) + \mu^T (g(x) + y^{[2]})$$

Nezápornost Lagrangeova koeficientu μ odvodíme pomocí citlivosti kritéria na změnu omezení.

Omezení $g(x) \leq 0$ a $h(x) = 0$ určuje množinu přípustných řešení X .

Nerovnostní omezení $g(x) \leq b$, $b \geq 0$ a $h(x) = 0$ určuje novou množinu přípustných řešení $\bar{X}$.

Platí $\bar{X} \supset X$.

Minimum na větší množině nemůže být větší než minimum na podmnožině.

$$\min_{x \in \bar{X}} f(x) \leq \min_{x \in X} f(x)$$

Přídávek kritéria při změně omezení $\min_{x \in \bar{X}} f(x) - \min_{x \in X} f(x) \leq 0$ je nekladný.

$$\text{Podle citlivosti věty } \frac{\partial f(x)}{\partial b} = -\mu^T$$

Přídávek kritéria

$$\Delta f(x) = -\mu^T \Delta b = -\mu^T b$$

Proto Lagrangeův koeficient μ musí být nezáporný $\mu \geq 0$.

Omezení s nerovnostmi

$$\min \{ f(x) : h(x) = 0 : g(x) \leq 0 \}$$

Definice: Regulární bod omezení

Nechť x^* je bod splňující omezení a nechť J je množina indexů j pro která $g_j(x) = 0$ (omezení jsou aktivní). Pak x^* je regulární bod omezení, jestliže gradienty $\nabla h_i(x)$, $\nabla g_j(x)$, pro $1 \leq i \leq m$; $j \in J$ jsou lineárně nezávislé.

Nutné podmínky prvního řádu:

Věta: Karush, Kuhn, Tucker (KKT) Nechť x^* je bod relativního minima problému a x^* je regulární bod omezení. Pak existuje vektor $\lambda \in E^m$ a vektor $\mu \in E^p$, že

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \nabla h(x^*) \lambda + \nabla g(x^*) \mu &= 0 \\ \mu^T g(x^*) &= 0 \\ \mu &\geq 0 \end{aligned}$$

Pro neaktivní omezení musí být příslušný Lagrangeův koeficient nulový.

Pokud je omezení aktivní, může být odpovídající Lagrangeův koeficient libovolný (ale nezáporný).

Lagrangeova funkce $L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^T h(x) + \mu^T g(x)$

KKT nutné podmínky

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x, \lambda, \mu) &= 0 \\ \nabla_\lambda L(x, \lambda, \mu) &= 0 \\ \nabla_\mu L(x, \lambda, \mu) &\leq 0 \\ \nabla_\mu L(x, \lambda, \mu) \mu &= 0, \quad \mu \geq 0 \end{aligned}$$

Podmínku $\mu^T g(x^*) = 0$ odvodíme z nutné podmínky minima

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial y_j} = 2\mu_j y_j = 0$$

Platí tedy také $\mu_j y_j^2 = 0$. Omezení $y_j^2 = -g_j(x)$ a proto po složkách $\mu_j g_j(x) = 0$.

Nutné podmínky druhého řádu:

$$\nabla^2 L(x^*) = \nabla^2 f(x^*) + \nabla^2 h(x^*) \lambda + \nabla^2 g(x^*) \mu$$

Věta: Předpokládáme, že funkce f , h , $g \in C^2$ a x^* je regulární bod omezení. Je-li x^* bod relativního minima, pak existují vektory λ a $\mu \geq 0$, že platí Kuhnovy - Tuckerovy podmínky a Hessova matice

$$\nabla^2 L(x^*) = \nabla^2 f(x^*) + \nabla^2 h(x^*) \lambda + \nabla^2 g(x^*) \mu$$

je pozitivně semidefiniční na tečné nadrovině aktivních omezení.

□

Nestačí aby Hessova matice $\nabla^2 L(x^*)$ byla v minimu pozitivně definitní na tečné nadrovině aktivních omezení, ale je třeba.

aby $L(x^*)$ byla pozitivně definitní na podprostoru

$$\bar{M} = \{ y : \nabla h(x^*)^T y = 0 : \nabla g_j(x^*)^T y = 0 : j \in \bar{J} \}$$

kde

$$\bar{J} = \{ j : g_j(x^*) = 0 : \mu_j > 0 \}$$

Vylučujeme tedy degenerovaná omezení.

Existují čtyři modifikace základní úlohy nelineárního programování

- (a)

$\min \{f(x) : g(x) \leq 0\}$
- (b)

$\max \{f(x) : g(x) \leq 0\}$
- (a)

$\min \{f(x) : g(x) \geq 0\}$
- (a)

$\max \{f(x) : g(x) \geq 0\}$

Lagrangeova funkce pro všechny úlohy

$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x)$

KKT pro tyto čtyři podobné úlohy:

$\nabla_x L(x, \lambda) = 0$

platí pro všechny čtyři úlohy, určuje stacionární body.

$\nabla_\lambda L(x, \lambda) \leq 0$

určuje omezení a proto platí pro prvé dvě úlohy. Pro třetí a čtvrtou úlohu platí obrácené znaménko.

$\nabla_\lambda L(x, \lambda) \lambda = 0$

platí pro všechny čtyři úlohy, neboť je odvozena z podmínek stacionárnosti.

Podmínka nezápornosti Lagrangeových koeficientů $\lambda \geq 0$ platí pro minimalizační úlohy (problém (a) a (c)).

Pro úlohy maximalizace platí obrácená nerovnost.

Jsou-li v úloze nelineárního programování omezení na nezápornost některých proměnných, lze Lagrangeovy koeficienty u těchto omezení eliminovat.

$\min \{f(x) : x_j \geq 0; j \in J\}$

Omezení převedeme do námi užívaného tvaru $g_j(x) = (-x_j) \leq 0; j \in J$. KKT jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j \in J} \lambda_j \frac{\partial (-x_j)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j \in J} \lambda_j (-\delta_{ij}) = 0$$

$$x_j \geq 0; \lambda_j x_j = 0; \lambda_j \geq 0; j \in J$$

Odtud KKT bez Lagrangeových koeficientů

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \quad \text{pro } j \notin J$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \geq 0; \quad \frac{\partial f}{\partial x_j} x_j = 0; \quad x_j \geq 0 \quad \text{pro } j \in J$$

SEDLOVÝ BOD, DUALITA

VÍCEKRITERIÁLNÍ OPTIMALIZACE

Kdy platí rovnost ukázal von Neumann.

Věta: von Neumann

Nechť $X \subset R^n$, $Y \subset R^m$ jsou dvě neprázdné kompaktní konvexní množiny. Dále nechť $f : R^n \times R^m \rightarrow R$ je spojitá funkce, která

1) pro každé $y \in R^m$ je $f(\cdot, y)$ konvexní na X

2) $x \in R^n$ je $f(x, \cdot)$ konkávní na Y .

Pak

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y) = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y)$$

a navíc existují vektory $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, že

$$\min_{x \in X} f(x, y_0) = f(x_0, y_0) = \max_{y \in Y} f(x_0, y)$$

Mějme problém

$$\min \{ f(x) : g(x) \leq 0 \}$$

Platí věta o sedlovém bodě:

Jestliže $x^* \in X$, $\lambda^* \geq 0$ je sedlovým bodem Lagrangeovy funkce

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x),$$

pak x^* je řešením problému.

SEDLOVÝ BOD A DUALITA

Sedlové vlastnosti Lagrangeovy funkce

Lagrangeova funkce má v optimálních bodech x^* , λ^* tzv. **sedlový bod**.

Mějme tedy funkci $f(x, y)$ definovanou na $X \times Y$.

Funkce $f(x, y)$ má v bodě x^* , y^* sedlový bod, platí-li pro všechny $(x, y) \in X \times Y$

$$f(x^*, y) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x, y^*), \quad \text{respektive} \quad f(x^*, y) \geq f(x^*, y^*) \geq f(x, y^*)$$

Obecně platí

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) \leq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y)$$

Důkaz: Platí

$$\min_{y \in Y} f(x, y) \leq f(x, y), \quad \text{pro } x \in X, y \in Y$$

Nerovnost se neporuší maximalizací obou stran vzhledem k x

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) \leq \max_{x \in X} f(x, y), \quad \text{pro } y \in Y$$

Protože předchozí nerovnice platí pro všechna $y \in Y$, platí i pro y , pro kterou je pravá strana minimální.

Předchozí tvrzení je postačující podmínkou optima (bez předpokladů o regularitě).

Důkaz: Sedlový bod Lagrangeovy funkce splňuje nerovnice

$$L(x, \lambda^*) \geq L(x^*, \lambda^*) \geq L(x^*, \lambda), \quad \text{pro } \lambda \geq 0, \lambda^* \geq 0, x \in X.$$

Pravá nerovnost zaručuje, že x^* je přípustné řešení.

Pokud by x^* nebylo přípustné, pak by některé omezení $g_j > 0$.

V Lagrangeově funkci $L(x, \lambda)$ bychom vždy mohli volit $\lambda_j \geq 0$ takové, aby pravá nerovnost byla porušena.

Je-li x přípustné a $\lambda_j^* > 0$ a $g_j(x) \leq 0$, pak pro $\lambda_j g_j(x) \leq \lambda_j^* g_j(x)$ pro všechny $\lambda_j > 0$ musí být $g_j(x) = 0$.

Je-li x přípustné, ale $\lambda_j^* = 0$, pak nerovnost $\lambda_j g_j(x) \leq \lambda_j^* g_j(x) = 0$ je splněna pro libovolné $\lambda_j \geq 0$.

Pravá nerovnice zaručuje, že x^* je přípustné a Lagrangeova funkce je rovna $f(x)$, neboť $\lambda_j^* g_j(x) = 0, \forall j$.

Platí tedy

$$L(x, \lambda^*) = \{ f(x) : g(x) \leq 0 \}$$

Levá nerovnost zaručuje, že x^* je řešením naší úlohy.

Abychom dokázali nutnost věty o sedlovém bodě, je nutno doplnit předpoklady o **regularitě a konvexnosti**.

Úloha **konvexní optimalizace** je úloha, v níž jsou kritérium $f(x)$ i funkce $g(x)$ konvexními funkcemi.

Omezení ve tvaru rovnosti je lineární.

Potom množina přípustných řešení X je konvexní množina.

V omezeních $g_j(x) \leq 0$ stačí uvažovat pouze nelineární funkce $g_j(x)$.

Existuje více podmínek regularity. Asi nejjednodušší je

Podmínka regularity Slatera:

Existuje bod $x \in \text{relint}(X)$, kde X je určena pouze nelineárními omezeními $g_i(x) \leq 0$.

Omezení ve tvaru rovnosti jsou lineární.

Podmínka regularity Slatera vyžaduje, aby existoval vnitřní bod množiny nelineárních omezení, to je bod x pro který platí $g_i(x) < 0$.

Existence sedlového bodu za předpokladu regularity a konvexnosti je nutnou a postačující podmínkou řešení.

DUALITA

Původní - primární problém

$$\min \{f(x) : g(x) \leq 0\}$$

Vývojně jiný problém - duální - se speciálními vlastnostmi.

Lagrangeova funkce

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x).$$

Dvě funkce

$$\varphi(x) = \max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda), \quad \psi(\lambda) = \min_x L(x, \lambda).$$

x není omezeno.

Duální úlohu můžeme upravit - x není omezeno

$$\min_x L \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda^T \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

Duální úloha

$$\text{DUÁLNÍ: } \max_{\lambda} \left\{ f(x) + \lambda^T g(x) : \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda^T \frac{\partial g}{\partial x} = 0 ; \lambda \geq 0 \right\}$$

Pro srovnání uvedeme úlohu primární

$$\text{PRIMÁRNÍ: } \min \{f(x) : g(x) \leq 0\}$$

Pro úlohu konvexního programování při splnění podmínek regularity platí věta o sedlovém bodě, pak

$$\min_{x, \lambda \geq 0} \max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda) = \max_{\lambda \geq 0} \min_x L(x, \lambda) = L(x^*, \lambda^*) = f(x^*)$$

Dualitní mezera v optimu je $(p^* - d^*) = 0$.

Řešením duální úlohy se k optimu blížíme zdola.

Řešením primární úlohy se k optimu blížíme shora.

Primární a duální problémy:

Omezení typu rovnosti:

$$\text{PRIMÁRNÍ: } \min \{f(x) : h(x) = 0\}$$

$$\text{DUÁLNÍ: } \max_{\lambda} \{f(x) + \lambda^T h(x) : \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda^T \frac{\partial h}{\partial x} = 0\}$$

Při omezení typu rovnosti chybí podmínka $\lambda \geq 0$.

Pro $\varphi(x)$ a $\psi(\lambda)$ definujeme dvě úlohy:

$$(A) \quad \min_x \varphi(x) = \min_x \max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda) = p^*$$

$$(B) \quad \max_{\lambda \geq 0} \psi(\lambda) = \max_{\lambda \geq 0} \min_x L(x, \lambda) = d^*.$$

Úloha (A) je totožná s původní úlohou. Platí

$$\min_{x \in X} f(x) = \min_x \varphi(x)$$

neboť pro $\lambda \geq 0$

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in X \\ \infty & \text{pro } x \notin X \end{cases}$$

Proto

$$\min_{x \in X} f(x) = \min_x \max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda)$$

Úloha (A) je totožná s původním problémem - primární úloha.

Úloha (B) je duální úloha.

Vztah mezi primární a duální úlohou nelineárního programování

$$(\text{Primární úloha}) \quad p^* = \min_x \max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda) \geq \max_{\lambda \geq 0} \min_x L(x, \lambda) = d^* \quad (\text{Duální úloha})$$

Nezáporný rozdíl $(p - d) \geq 0$ je **duální mezera**.

Omezení na nezápornost:

$$\text{PRIMÁRNÍ: } \min \{f(x) : g(x) \leq 0 ; x \geq 0\}$$

Duální problém

$$\max_{\lambda \geq 0, \mu \geq 0} \left\{ f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T (-x) : \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda^T \frac{\partial g}{\partial x} + \mu^T (-1) = 0 \right\} =$$

$$\max_{\lambda \geq 0} \left\{ f(x) + \lambda^T g(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda^T \frac{\partial g}{\partial x} \right) (-x) : \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda^T \frac{\partial g}{\partial x} \geq 0 \right\}$$

V duální úloze není duální proměnná μ .

Dualita lineárního a kvadratického programování

$$\text{PRIMÁRNÍ PROBLÉM LP: } \max \{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\}$$

Upravíme na úlohu minimalizace

$$- \min \{ -c^T x : Ax - b \leq 0, -x \leq 0 \}$$

Lagrangeova funkce

$$L(x, \lambda, \mu) = -c^T x + \lambda^T (Ax - b) + \mu^T (-x)$$

Duální úloha

$$- \max_{\lambda \geq 0, \mu \geq 0} \min_x L(x, \lambda, \mu) = - \max_{\lambda, \mu} \{ L(x, \lambda, \mu) : \nabla_x L(x, \lambda, \mu) = 0, \lambda \geq 0, \mu \geq 0 \}$$

Úprava Lagrangeovy funkce

$$L(x, \lambda, \mu) = x^T(-c + A^T\lambda - \mu) - \lambda^T b$$

$$Z \nabla_x L = 0 \text{ plyne } (-c + A^T\lambda - \mu) = 0$$

$$A^T\lambda - c = \mu \geq 0$$

Lagrangeova funkce se zjednoduší

$$L(x, \lambda, \mu) = -\lambda^T b$$

Dualní úloha

$$-\max \{ -\lambda^T b : A^T\lambda \geq c, \lambda \geq 0 \}$$

neboli

$$\text{DUALNÍ PROBLÉM LP: } \min \{ \lambda^T b : A^T\lambda \geq c, \lambda \geq 0 \}.$$

Nerovnostní omezení v primální i dualní úloze (PLP a DLP) převeďme na rovnosti

$$\text{PLP: } \max \{ c^T x : Ax + v = b, x \geq 0, v \geq 0 \}$$

$$\text{DLP: } \min \{ \lambda^T b : A^T\lambda - s = c, \lambda \geq 0, s \geq 0 \}.$$

Výraz

$$\lambda^T v + x^T s = \lambda^T (b - Ax) + x^T (A^T\lambda - c) = \lambda^T b - x^T c$$

je roven dualní mezeře (rozdíl řešení dualní a primální úlohy) a v optimu je roven nule.

Primární a dualní problém kvadratického programování (QP).

Obvyklý tvar kvadratického programování

$$\text{PRIMÁRNÍ QP: } \min \left\{ q(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x : Ax = b, x \geq 0 \right\}$$

Lagrangeova funkce

$$L = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x + \lambda^T (b - Ax) + \mu^T (-x)$$

Dualní problém

$$\max \left\{ L(x, \lambda, \mu) : \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \mu \geq 0 \right\}$$

Gradient Lagrangeovy funkce

$$\frac{\partial L}{\partial x} = Qx + c - A^T\lambda - \mu = 0$$

Dualní problém kvadratického programování (DQP) je

$$\text{DQP: } \max \left\{ d(\lambda, x) = b^T\lambda - \frac{1}{2}x^T Qx : A^T\lambda + \mu - Qx = c, x \geq 0, \mu \geq 0 \right\}$$

Pro přípustné x, λ, μ platí podmínky komplementarity

$$x^T \mu = x^T \left(c + Qx - A^T\lambda \right) = \underbrace{c^T x + \frac{1}{2}x^T Qx}_{q(x)} - \underbrace{\left(b^T\lambda - \frac{1}{2}x^T Qx \right)}_{d(\lambda, x)}$$

Protože všechny proměnné jsou nezáporné, platí tzv. podmínky komplementarity:

Pokud $\lambda_i \neq 0$, pak musí odpovídat $v_i = 0$ a obráceně.

Také pro $x_i \neq 0$ musí odpovídat $s_i = 0$ a obráceně.

Nenulovost dualních proměnných signalizuje, že primární omezující podmínky jsou splněny těsně (ve tvaru rovnosti).

Také nenulovost primárních proměnných znamená, že dualní omezení jsou splněna těsně.

Lineární programování s omezení typu rovnosti.

$$\text{PLP: } \max \{ c^T x : Ax = b, x \geq 0 \}$$

$$\text{DLP: } \min \{ \lambda^T b : A^T\lambda \geq c \}$$

Zavedením nezáporné pomocné proměnné je dualní úloha

$$\text{DLP: } \min \{ \lambda^T b : A^T\lambda - s = c, s \geq 0 \}$$

Dualní mezeře je

$$x^T s = x^T (A^T\lambda - c) = \lambda^T Ax - x^T c = \lambda^T b - x^T c$$

V optimu je dualní mezeře nulová a proto je-li $x_i \neq 0$, pak $s_i = 0$ (dualní omezení jsou splněna těsně).
pokud $s_i \neq 0$, pak $x_i = 0$ (primární omezení jsou splněna těsně).

Proto výraz $x^T \mu$ je roven rozdílu primárního a dualního přípustného řešení (dualní mezeře) a v optimu

$$(x^*)^T \mu^* = 0.$$

Charakteristika duality

Dualitu lze interpretovat několika způsoby

• Minimaxová charakteristika duality

$$p^* = \min_x \max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda)$$

$$d^* = \max_{\lambda \geq 0} \min_x L(x, \lambda)$$

Při slabé dualitě platí $d^* \leq p^*$.

Při silné dualitě platí $d^* = p^*$.

• Interpretace jako hra

Optimalizační problém můžeme interpretovat jako antagonistický konflikt dvou hráčů.

Proměnná x je strategie hráče, který se snaží minimalizovat ztrátu $L(x, \lambda)$ a

proměnná λ je strategie druhého hráče, který se snaží maximalizovat výhru $L(x, \lambda)$.

Řešení primární úlohy je **horní cena hry** - zaručená výhra hráče, který minimalizuje.

Řešení dualní úlohy je **dolní cena hry** - zaručená výhra hráče, který maximalizuje.

• Ekonomická interpretace

Funkce $f(x)$ představuje operační náklady ekonomické činnosti, které se snažíme minimalizovat.

Omezení zdrojů je $g(x) \leq 0$.

Omezení zdrojů může být překročeno, ale platíme za překročení lineárně v $g_i(x)$, to je platíme celkově $\sum \lambda_i g_i(x)$.

Pokud některé zdroje nevyužijeme, pak je můžeme prodat či pronajmout a naopak získat (opět lineárně v $g_i(x)$).

Celkové náklady jsou pak rovny $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x)$.

Slabá dualita - operační náklady jsou menší při nerespektování omezení (můžeme získat z omezení, která plně nevyužijeme).

Silná dualita - taková množina cen omezení λ^* , při kterých není žádná výhoda, je-li možno platiť či získat za nedodržení omezení.

Citlivostní analýza

Nejprve odvodíme nediferenciální odhad vlivu uvolnění omezení.

Uvolníme omezení

$$\min \{f(x) : g_i(x) \leq u_i, h_j(x) = v_j\} = p^*(u, v)$$

Předpokládáme, že platí silná dualita (podmínky Slatera).

Nyní diferenciální citlivost.

$$\begin{aligned} p^*(u, v) &= p^* + \nabla_u p^*(0, 0)^T u + \nabla_v p^*(0, 0)^T v + o(u, v) \geq p^* - (\lambda^*)^T u - (\mu^*)^T v \\ p^*(-u, -v) &= p^* - \nabla_u p^*(0, 0)^T u - \nabla_v p^*(0, 0)^T v + o(u, v) \geq p^* + (\lambda^*)^T u + (\mu^*)^T v \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} -\nabla_u p^*(0, 0)^T u - \nabla_v p^*(0, 0)^T v + o(u, v) &\leq (\lambda^*)^T u + (\mu^*)^T v \\ -\nabla_u p^*(0, 0)^T u - \nabla_v p^*(0, 0)^T v + o(u, v) &\geq (\lambda^*)^T u + (\mu^*)^T v \end{aligned}$$

a proto

$$\lambda^* = -\nabla_u p^*(0, 0), \quad \mu^* = -\nabla_v p^*(0, 0)$$

Lagrangeův koeficient je roven citlivosti kritéria na změnu omezení - stínová cena.

Řešení původní úlohy nechť je $p^* = p^*(0, 0)$. Potom pro všechna x přípustná platí

$$p^* \leq f(x) + (\lambda^*)^T g(x) + (\mu^*)^T h(x)$$

kde λ^*, μ^* jsou optimální pro původní duální problém. Nyní pro x přípustné pro uvolněný problém

$$p^* \leq f(x) + (\lambda^*)^T g(x) + (\mu^*)^T h(x) \leq f(x) + (\lambda^*)^T u + (\mu^*)^T v$$

Nyní optimalizují přes uvolněnou proměnnou x

$$p^* \leq p^*(u, v) + (\lambda^*)^T u + (\mu^*)^T v$$

Proto platí

$$p^*(u, v) \geq p^* - (\lambda^*)^T u - (\mu^*)^T v$$

Toto je odhad dolní neze pro uvolněné optimum.

Pokud λ_i^* je velké a užitím omezení ($u_i < 0$), pak optimum (minimum) vzroste hodně.

Pokud je λ_i^* opět velké, ale uvolním omezení ($u_i > 0$), pak nemohu tvrdit, že optimum hodně klesne.

Označím $\Delta = \lambda_i^* u_i$, pak

$$p^*(u, v) \geq p^* - \Delta$$

Optimum "uvolněním" klesne nejvýše o Δ . Optimum "uzažením" vzroste nejméně o Δ .

Vícekriteriální optimalizace

V reálných rozhodovacích situacích často sledujeme více kritérií, podle nichž hodnotíme nejlepší varianty řešení.

Problém správně definovat úlohu optimalizace v případě vícekriteriálnosti.

Již při formulování kritérií se vyskytují problémy a některá hodnotící kritéria jsou často formulována pouze kvalitativně.

Často vyšší zisk je spojen s vyšším rizikem.

Teorie užítu přizpůsobuje variantám řešení číselné ohodnocení (užitků) tak, aby hodnota užítu byla v souladu s preferencemi rozhodujícího subjektu - vyšší užitek znamená vyšší preferenci.

Vícekriteriální optimalizace - víceaspektní, víceatributní či vektorová optimalizace. To vede na vektorové či kompromisní programování.

Snažíme se vícekriteriální optimalizační problém převést na **problém skalární s jedním optimalizačním kritériem**.

- volbou vah u jednotlivých kritérií
- metodou cílového programování
- lexikografickým uspořádáním kritérií
- minimaxovou optimalizací

Volba vah jednotlivých kritérií.

Jednotlivá kritéria $f_1(x)$ až $f_p(x)$, pak jediné kritérium je

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \dots + \alpha_p f_p(x)$$

kde koeficienty α_i vyjadřují preference jednotlivých kritérií.

Stanovení cíle, kterého se snažíme dosáhnout ve všech kritériích.

Protože stanoveného cíle nelze dosáhnout současně ve všech kritériích, pak se snažíme alespoň minimalizovat vzdálenost konkrétního řešení od cíle.

Geometrická interpretace.

Označme jako $f_i^*(x)$ cíl, který chceme dosáhnout v i -tém kritériu. Metoda cílového programování vede na úlohu

$$\min \{ \lambda : f_i(x) - w_i \lambda \leq f_i^*(x), i = 1, \dots, p, x \in X \}$$

kde λ je skálár, na který neklademe žádné omezení a $w_i > 0$ jsou váhové koeficienty.

λw_i vyjadřuje rozdíl mezi stanoveným cílem a skutečnou hodnotou příslušného kritéria.

Pokud j -té kritérium chceme co nejvíce přiblížit k cíli, je třeba volit u něho výrazně menší váhový koeficient - $w_j < w_i$, pro $i \neq j$.

Přípustná řešení $x \in X$ vytvářejí v prostoru kritérií množinu možných hodnot kritérií.

Hledáme přípustné řešení, které leží v průsečíku polopřímky vycházející z cílového bodu $f_i^*(x)$ s množinou přípustných hodnot kritérií.

Směrnice polopřímky vycházející z cílového bodu $f_i^*(x)$ je určena váhami w_i .

Varianta této metody je tzv. **metoda s ϵ -omezením**.

V této metodě minimalizujeme nějaké vybrané preferenční kritérium a ostatní kritéria podrobně omezením

$$\min_{x \in X} \{ f_s(x) : f_i(x) \leq \epsilon_i, i = 1, 2, \dots, p, i \neq s \}$$

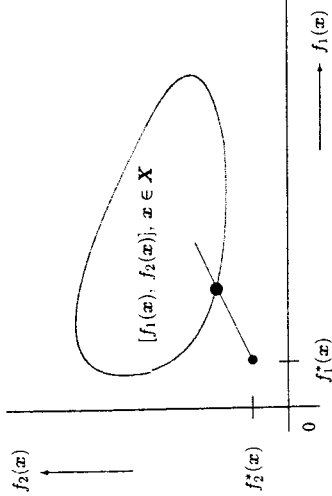
Problémem je volba omezení ϵ_i .

Minimaxová optimalizace vede na úlohu optimalizace, ve které hledáme takové přípustné řešení, v němž je maximální hodnota nějakého kritéria minimální

$$\min_{x \in X} \max_i f_i(x),$$

Problém je totožný s cílovým programováním, kde volíme váhy w_i všechny stejné a cíl je v počátku. Tato formulace připomíná problémy z teorie her.

Řešení vícekritériální optimalizace bez převodu na skalární problém:



Obrázek 4: Optimální řešení podle důležitosti

Uspořádání kritéria podle důležitosti.

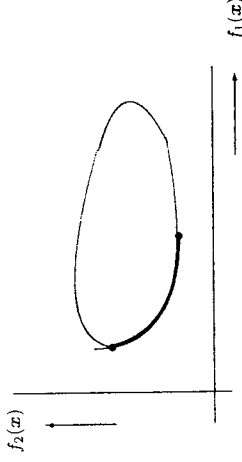
Optimalizujeme první kritérium a z množiny optimálních řešení vybereme řešení, které minimalizuje druhé kritérium v pořadí aut.

Hledáme **nedominované varianty** - varianty přípustného řešení, že neexistuje jiná přípustná varianta, při které některé kritérium dosahuje nižší hodnoty a ostatní kritéria nerostou.

Jedno kritérium lze zlepšit pouze na úkor zhoršení jiného kritéria.

Nedominované varianty - **paretovsky optimální**, nebo **neinferiorní** či **eficientní varianty**.

Pokud je jediná nedominovaná varianta, pak ji můžeme označit za optimální variantu.



Obrázek 5: Paretoovsky optimální varianty řešení

Pokud je nedominovaných variant více, pak neexistuje jediný exaktní postup řešení.

Můžeme volit hypotetické ideální hodnoty jednotlivých kritérií a nejhorší tzv. **bazální hodnoty kritérií**. Reálné přípustné varianty řešení se pohybují mezi těmito krajnostmi.

Příklad: Určení optimální skládky odpadů.

Tabulka 2: Skládka odpadků - hodnocení variant

	zbor půdy	investiční náklady	neg. důsl. pro okolí	neg. důsl. pro vodu	kapacita
x_1	6	1.2	4	2	6
x_2	11.2	14.4	2	2	4.5
x_3	1.9	4.8	2	4	7.5
x_4	6.4	13.4	2	2	4.5

Je třeba vybrat optimální lokalitu skládky - jednu ze čtyř možností, které označíme x_1 až x_4 .
Při tom hodnotíme pět kritérií -
Při optimalizaci se budeme snažit minimalizovat zbor půdy i investiční náklady, ale naopak maximalizovat v hodnotící stupnici negativních důsledků i maximalizovat kapacitu skládky.
Všechna kritéria minimalizována - upravíme poslední tři sloupce předchozí tabulky.
V příslušném sloupci nalezneme maximální prvek a nové hodnocení bude rovno rozdílu maximálního prvku ve sloupci a příslušného prvku.

Tabulka 3: Skládka odpadků - úprava hodnocení variant

	zbor půdy	investiční náklady	neg. důsl. $(f_3)_{max} - f_3$	neg. důsl. $(f_4)_{max} - f_4$	kapacita $(f_5)_{max} - f_5$
x_1	6	1.2	0	2	1.5
x_2	11.2	14.4	2	2	3
x_3	1.9	4.8	2	0	0
x_4	6.4	13.4	2	2	3

Strategie x_1 dominuje strategiím x_2 i x_4 a naopak strategie x_3 dominuje strategiím x_2 i x_4 .
Při tom strategie x_1 a x_3 nejsou vzájemně dominovány.
Nedominované strategie (Paretovskými optimálními strategiemi) jsou tedy dvě strategie x_1 a x_3 .
Pro výběr jediné optimální strategie nemáme žádné objektivní hledisko.
Výběr optimální varianty není jednoznačný a problém má značný subjektivní motiv.
Jistě budou existovat různé preference i případně lokální zájmy, které lze i zdůvodnit vhodným výběrem argumentů.
Každý reálný rozhodovací problém je vícekritériální.

8

NUMERICKÉ METODY

NELINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ I.

Definice: Uzavřené zobrazení:
Zobrazení $\mathcal{P}$ bodu $x \in X$ na množinu $y \subset X$ je uzavřené v bodě $x \in X$, jestliže z předpokladu $x_k \rightarrow x; x_k \in X, y_k \rightarrow y; y_k \in \mathcal{P}(x_k)$ plyne $y \in \mathcal{P}(x)$.

Zobrazení $\mathcal{P}$ je uzavřené, je-li uzavřené v libovolném bodě $x \in X$.

Při zobrazení bodu na bod vyplývá uzavřenost zobrazení ze spojitosti, to znamená, že pro $x_{k+1} = \mathcal{P}(x_k)$ a platí-li $x_k \rightarrow x$, pak $\mathcal{P}(x_k) \rightarrow \mathcal{P}(x)$.

Mějme tedy množinu řešení Γ úlohy nelineárního programování.

Posloupnost bodů x_k je generována algoritmem $x_{k+1} \in \mathcal{P}(x_k)$, při čemž každý bod ostře snižuje hodnotici funkci tak dlouho, až dosáhneme Γ . Potom platí

Věta o globální konvergenci:
Nechť $\mathcal{P}$ je algoritmus na X , dále předpokládáme, že je generována posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ předpisem $x_{k+1} = \mathcal{P}(x_k)$. Je dána množina řešení $\Gamma \subset X$ a předpokládáme, že

1. všechna x_k jsou obsažena v kompaktní množině $S \subset X$
2. existuje spojitá hodnoticí funkce Z na X , že pro $x \notin \Gamma$, pak $Z(y) < Z(x), \forall y \in \mathcal{P}(x)$
 $x \in \Gamma$, pak $Z(y) \leq Z(x), \forall y \in \mathcal{P}(x)$
3. Zobrazení je uzavřené pro všechny body mimo Γ

Pojmí limita libovolné konvergentní posloupnosti $\{x_k\}$ je řešení.

NUMERICKÉ METODY

Všechny metody jsou založeny na iteracích postupech (algoritmech).

Algoritmy a jejich konvergence

Definice algoritmu:
Algoritmus $\mathcal{P}$ je zobrazení definované na prostoru X , které každému bodu $x \in X$ přiřazuje podmnožinu z X .
Nemusi to tedy být zobrazení bodu na bod, ale bodu na množinu.
Algoritmus generuje posloupnost bodů $x_k \in X$ tak, že z podmnožiny $\mathcal{P}(x_k)$ vybere libovolný bod x_{k+1} .
Je-li dán počáteční bod x_0 , algoritmus generuje posloupnost $x_{k+1} \in \mathcal{P}(x_k)$

Obvykle numerickými metodami hledáme minimum t. zv. **hodnoticí funkce**.
Hodnoticí funkce je často přímo kritérium $f(x)$, nebo třeba norma gradientu $\|\text{grad } f(x)\|$.
Algoritmus obvykle zajišťuje v každé iteraci pokles hodnoticí funkce.
Zobecnění pojmu spojitosti při zobrazení bodu na bod je pojem uzavřeného zobrazení.

Mnoho složitých algoritmů je složeno z několika jednodušších algoritmů, které definují uzavřené zobrazení. Je možno dokázat, že algoritmus složený z řady jednodušších uzavřených algoritmů je také uzavřený.

Globální konvergence nezaručuje nalezení globálního řešení.

Většina algoritmů nalezne pouze lokální řešení, které je rovno globálnímu řešení pouze tehdy, jsou-li splněny další předpoklady, které se nejčastěji týkají konvexnosti problému.

Konvergence iteracních výpočetních postupů

Optimální řešení značíme s hvězdičkou - x^*, λ^* a pod.
Iterační postup je **konečný**, jestliže po konečném počtu kroků K platí $x^* = \mathcal{P}(x_K)$

Iterační postup je **nekonečný**, je-li $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$.

Konvergenci iteracních algoritmů zaručuje věta o pevném bodě, která ale vyžaduje, aby zobrazení definované algoritmem $\mathcal{P}$ bylo kontrahující zobrazení.

Definice:
Nechť S je podmnožina normovaného prostoru X a nechť $\mathcal{P}$ je zobrazení S na S . Pak $\mathcal{P}$ je **kontrahující zobrazení**, jestliže existuje $\alpha, 0 \leq \alpha < 1$ takové, že $\|\mathcal{P}(x_1) - \mathcal{P}(x_2)\| \leq \alpha \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in S$.

Věta o pevném bodě:

Je-li P kontrahující zobrazení na uzavřené množině S , pak existuje jediný vektor $x^* \in S$ splňující $x^* = P(x^*)$. Dále x^* lze získat metodou postupných aproximací (algoritmami P), začneme-li z libovolného bodu $x_0 \in S$.

Často nás více než vlastní konvergence zajímá, jak rychle se iteracním postupem blížíme k řešení.

Rychlost konvergence vyjadřujeme tzv. **řádem konvergence**.

Přitom vzdálenost dvou bodů x a y můžeme hodnotit např. Eukleidovou metrikou

$$\sigma(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

kde x_i, y_i jsou i -té složky vektoru x resp. y .

Definice:

Řád konvergence posloupnosti x_k je roven supremu nezáporných čísel $p \geq 0$, pro která platí

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sigma(x_{k+1}, x^*)}{[\sigma(x_k, x^*)]^p} < \infty$$

Při tom předpokládáme, že iteracní postup je nekonečný.

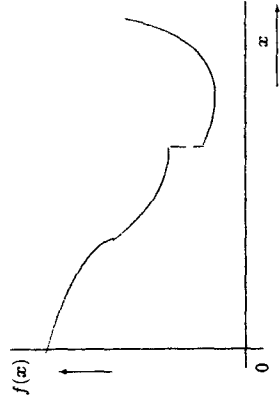
Pokud $p = 1$ zavádíme jemnější míru konvergence.

JEDNOROZMĚŘOVÁ OPTIMALIZACE

FIBONACCIOVA METODA

Fibonacciho metoda řeší problém nalezení extrémů nějaké funkce $f(x)$ jedné proměnné x na daném intervalu.

Předpoklad - daná funkce je na zvoleném intervalu unimodální (na zvoleném intervalu má jeden extrém) - např. jedno minimum, viz obr.



Je dán počáteční interval d_1 , nejistoty nezávisle proměnné, v níž hledané minimum leží.

Naším úkolem je co nejvíce zmenšit interval nejistoty, ve kterém leží minimum funkce.

Máme k dispozici určitý počet pokusů (volbu bodů $x_i, i = 1, 2, \dots, N$), ve kterých zjišťujeme hodnotu dané funkce.

Definice: Poloměr konvergence

Jevíříže

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sigma(x_{k+1}, x^*)}{\sigma(x_k, x^*)} = \alpha < 1$$

pak posloupnost x_k konverguje lineárně s poloměrem konvergence α .

Pro $\alpha = 0$ mluvíme o superlineární konvergenci.

□

Vybrané numerické metody nelineárního programování.

- Metody jednorozměrové optimalizace - optimalizace při jedné nezávisle proměnné.

Uplatní se i při mnohorozměrové optimalizaci, volíme směr hledání a optimalizace v daném směru je vlastně úloha jednorozměrového hledání.

- Metody optimalizace, nevyužívající derivace hodnotící funkce.

- Metody nelineárního programování bez omezení.

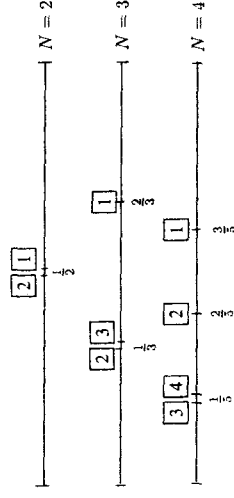
- Metody nelineárního programování s omezením.

Interval nejistoty se v závislosti na počtu pokusů zmenšuje podle Fibonacciho čísel.

Fibonacciho čísla F_i tvoří posloupnost, která je popsána rekurentním vztahem

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2},$$

kde $F_0 = F_1 = 1$.



Uvažujeme nejprve, že máme k dispozici pouze dva pokusy ($N = 2$), ve kterých můžeme zjistit funkční hodnotu neznámé unimodální funkce.

Abychom co nejvíce zmenšili interval nejistoty, ve kterém leží minimum této funkce, umístíme pokusy těsně vedle sebe uprostřed daného intervalu - viz obr. pro $N = 2$.

Je-li v bodě $2/3$ hodnota funkce menší než v bodě $1/3$, pak minimum funkce zřejmě leží v první polovině intervalu. V opačném případě leží v druhém intervalu. Interval nejistoty jsme tak zmenšili na polovinu pomocí dvou pokusů.

Pokud budeme mít k dispozici tři pokusy $N = 3$, pak naše strategie bude jiná.

První dva pokusy - body [1] a [2] umístíme do $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{3}$ intervalu nejistoty .
Pokud v bodě [2] je hodnota funkce menší než v bodě [1], pak minimum funkce leží v prvních dvou třetinách intervalu nejistoty.
Třetí pokus umístíme těsně vedle druhého a je-li hodnota funkce v bodě [2] menší než v bodě [3], pak minimum leží v první třetině intervalu nejistoty.
Pokud v bodě [2] bude hodnota funkce větší než v bodě [1], pak minimum funkce leží v druhých dvou třetinách intervalu nejistoty.
Třetí pokus potom umístíme těsně vedle bodu [1] a pak můžeme rozhodnout, zda minimum funkce leží v druhé nebo třetí třetině intervalu nejistoty.
Tím jsme třemi pokusy zmenšili interval nejistoty na $1/3$.
Máme-li k dispozici čtyři pokusy $N = 4$, pak první dva pokusy - body [1] a [2] - umístíme do $\frac{2}{9}$ a $\frac{7}{9}$ intervalu nejistoty .
Je-li v bodě [2] hodnota funkce menší než v bodě [1], pak minimum funkce zřejmě leží v prvních třech pětinach intervalu nejistoty. Třetí pokus umístíme pak do $\frac{1}{5}$.
Pokud bude v bodě [3] hodnota funkce menší než v bodě [2], pak minimum funkce zřejmě leží v prvních dvou pětinach intervalu nejistoty.
Volbou bodu [4] těsně vedle bodu [3] konečné zmenšíme interval nejistoty ještě na polovinu.
Minimální interval nejistoty bude tedy při čtyřech pokusech $\frac{1}{5}$ původního intervalu.
Označme tedy počáteční interval nejistoty jako d_1 . Pak interval nejistoty po N pokusech bude
$$d_N = \frac{1}{F_N} d_1$$

kde λ_1 a λ_2 jsou kořeny charakteristické rovnice
$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

Jeden kořen $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ je neslabitní a druhý kořen $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ je slabitní. Pak
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{d_{N+1}}{d_N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1^N}{\lambda_1^{N+1}} = \frac{1}{\lambda_1} = 0.618$$

Proto Fibonacciova metoda konverguje lineárně s konvergenčním poměrem 0.618.
Magické číslo $\lambda_1 = 1.618$ je známé jako **poměr zlatého řezu**. Tento poměr byl v starém Řecku považován za nejestetičtější poměr dvou stran obdélníku (např. ve stavebnictví).
Nevýhodou Fibonacciovy metody je, že naše strategie od začátku závisí na daném počtu pokusů.
Pokud přidáme ještě jeden pokus, pak vlastně musíme začít úplně znovu.
Tuto nevýhodu odstraňuje **metoda zlatého řezu**, která je vlastně Fibonacciova metoda pro $N \rightarrow \infty$.
Metoda zlatého řezu redukuje nejistotu každým pokusem o $\frac{1}{\lambda_1} = 0.618$.
$$d_N = \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^N d_1 = 0.618^N d_1$$

Proto pokusy vždy volíme v bodech 0.618 a $(1 - 0.618) = 0.382$ intervalu nejistoty.
Metoda zlatého řezu konverguje stejně jako Fibonacciova metoda lineárně s konvergenčním poměrem 0.618.

kde F_N je Fibonacciho číslo.
Počáteční interval nejistoty nechť je interval $[a, b]$. Obecný algoritmus volby bodů, ve kterých zjišťujeme hodnotu funkce, je :
1. Zvolme $\alpha_1 = a, \beta_1 = b$.
2. Vypočítáme pro $i = 1, 2, \dots, N - 1$
$$\bar{\alpha}_{i+1} = \beta_i - \frac{F_{N-i}}{F_{N-i+1}} |\beta_i - \alpha_i|, \quad \bar{\beta}_{i+1} = \alpha_i + \frac{F_{N-i}}{F_{N-i+1}} |\beta_i - \alpha_i|$$

3. Je-li $f(\bar{\alpha}_{i+1}) \leq f(\bar{\beta}_{i+1})$, pak $\alpha_{i+1} = \alpha_i, \beta_{i+1} = \bar{\beta}_{i+1}$,
je-li $f(\bar{\alpha}_{i+1}) > f(\bar{\beta}_{i+1})$, pak $\alpha_{i+1} = \bar{\alpha}_{i+1}, \beta_{i+1} = \beta_i$.
Vždy jedno z čísel α_i, β_i je rovno jednomu z čísel $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$.

Algoritmus optimalizním způsobem redukuje interval nejistoty, ve kterém leží minimum unimodální funkce, v závislosti na počtu pokusů.
Rychlost konvergence Fibonacciovy metody:
$$\frac{d_{N+1}}{d_N} = \frac{F_N}{F_{N+1}}$$

Generátor Fibonacciových čísel je popsán diferenční rovnicí $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$.
Řešení diferenční rovnice
$$F_N = c_1 \lambda_1^N + c_2 \lambda_2^N$$

Rozdíl mezi Fibonacciovou metodou a metodou zlatého řezu je patrný pouze pro menší počet pokusů
Redukce intervalu nejistoty v závislosti na počtu pokusů:

N	2	3	4	5	6	8	10
Fibonacciova metoda	0.5	0.333	0.2	0.125	0.077	0.0294	0.0111
Metoda zlatého řezu	0.618	0.382	0.236	0.146	0.09	0.0344	0.0131

Fibonacciova metoda nevyžaduje znalost derivací funkce.
Za předpokladu unimodality funkce je dokonce optimální.
Často zkoumaná funkce je hladká a tuto její vlastnost lze využít pro konstrukci efektivnějších metod.
Existuje řada metod, které se liší podle toho, kolik hodnot funkce máme k dispozici a zda známe derivace hledané funkce.
Všechny tyto metody mají řád konvergence větší než jedna.

NEWTONOVA METODA

Newtonova metoda vyžaduje znalost první a druhé derivace zkoumané funkce.

V bodě x_k , který je výsledkem i -té iterace, aproximujeme zkoumanou funkci kvadratickou funkcí $q(x)$, pak

$$f(x) \approx q(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x - x_k)^2$$

Nový odhad x_{k+1} bodu, ve kterém nastává extrém funkce $f(x)$, položíme do bodu, ve kterém nastává extrém aproximační funkce $q(x)$, to je do bodu, ve kterém je nulová první derivace funkce $q(x)$

$$0 = q'(x_{k+1}) = f'(x_k) + f''(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Odtud

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}.$$

Metoda je totožná s iteracním řešením rovnice $g(x) = 0$, (pak $g(x) = f'(x)$). Proto

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)}$$

Podle předchozího vztahu je funkce $g(x)$ aproximována v bodě x_k tečnou a proto se tato metoda nazývá také **metoda tečen** - viz obr.

Věta:

Nechť funkce $g(x) = f'(x)$ má spojitě druhé derivace a nechť ve stacionárním bodě, který označíme x^* platí $g(x^*) = f'(x^*) = 0$, $g(x^*) = f''(x^*) \neq 0$.

Za těchto předpokladů, je-li x_0 dostatečně blízko x^* , posloupnost x_k generovaná Newtonovou metodou konverguje k x^* s řádem konvergence alespoň dva.

Důkaz:

Nechť pro body ξ , které leží v okolí optimálního bodu x^* platí $|g''(\xi)| < r$ a $|g'(\xi)| > s$. Pak v okolí x^* platí

$$g(x^*) = 0 = g(x_k) + g'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2}g''(\xi)(x^* - x_k)^2$$

kde ξ je nějaký bod mezi x^* a x_k . Odtud

$$x^* = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)} - \frac{1}{2} \frac{g''(\xi)}{g'(x_k)} (x^* - x_k)^2.$$

Z Newtonovy metody plyne, že první dva členy na pravé straně předchozího vztahu jsou rovny x_{k+1} .

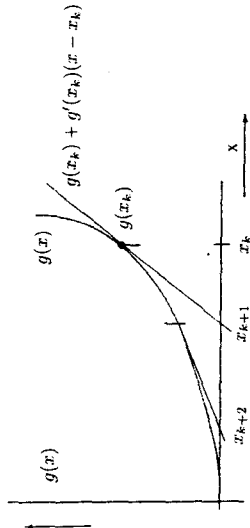
$$x^* - x_{k+1} = -\frac{1}{2} \frac{g''(\xi)}{g'(x_k)} (x^* - x_k)^2$$

Protože jsme dle předpokladu omezili hodnoty první a druhé derivace funkce $g(x)$ v okolí bodu x^* , pak v okolí tohoto bodu platí

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{r}{2s} |x_k - x^*|^2$$

Odtud dle definice řádu konvergence plyne, že Newtonova metoda vskutku konverguje s řádem konvergence alespoň dva.

To znamená, že blízko řešení každá iterace zpěšňuje výsledek o jeden řád.



Obrázek 6: Newtonova metoda

Příklad: Nalezněme iteracním postupem $\sqrt{2}$.

Pro hledané $x = \sqrt{2}$ tedy platí $g(x) = x^2 - 2 = 0$. Odtud

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k}$$

Pro počáteční odhad $x_0 = 1$, je $x_1 = 1.5$, $x_2 = 1.41666$, $x_3 = 1.41421$.

Konvergence algoritmu je velmi rychlá.

Globální konvergence Newtonovy metody není zaručena.

Pokud ale Newtonova metoda konverguje, pak konverguje s řádem konvergence alespoň dva.

METODA REGULA FALSI

Metoda Regula falsi aproximuje druhou derivaci funkce pomocí první difference jejích prvních derivací

$$f''(x_k) \approx \frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Potom iteracní předpis metody Regula falsi je

$$x_{k+1} = x_k - f'(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}$$

Věta: Konvergence metody Regula falsi

Za stejných předpokladů jako u Newtonovy metody je řád konvergence metody Regula falsi roven 1.618.

Protože důkaz řádu konvergence metody Regula falsi je zajímavý, uvedeme jej podrobně.

Důkaz: Jednodušší značení $y_k = g(x_k)$, $g^* = f'(x^*) = g(x^*) = f'(x^*)$ (ale v minimu samozřejmě $g(x^*) = 0$) a obdobně $g_{k-1} = g(x_{k-1})$.

Platí

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x^* &= x_k - x^* - g_k \frac{x_k - x_{k-1}}{g_k - g_{k-1}} \left[1 - \frac{g_k \frac{x_k - x^*}{g_k - g_{k-1}}}{\frac{g_k - g_{k-1}}{g_k - g_{k-1}}} \right] \\ &= (x_k - x^*) \left[\frac{g_k - g_{k-1} - \frac{g_k^2 - g_k g_{k-1}}{g_k - g_{k-1}}}{g_k - g_{k-1}} \right] = (x_k - x^*) \left[\frac{\frac{g_k - g_{k-1} - \frac{g_k^2 - g_k g_{k-1}}{g_k - g_{k-1}}}{g_k - g_{k-1}}}{\frac{g_k - g_{k-1}}{g_k - g_{k-1}}} \right] \end{aligned}$$

Při tom platí

$$\frac{g_k - g_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = g'(\xi_k), \quad \frac{g_k - g_{k-1} - \frac{g'' - g_k}{x_k - x_{k-1}}}{x_{k-1} - x^*} = \frac{1}{2} g''(\eta_k)$$

kde ξ_k je konvexní kombinace bodů x_k, x_{k-1} a η_k je konvexní kombinace bodů x_k, x_{k-1}, x^* .
Pak platí

$$x_{k+1} - x^* = \frac{g''(\eta_k)}{2g'(\xi_k)} (x_k - x^*)(x_{k-1} - x^*)$$

Z předchozího vztahu plyne, že metoda Regula falsi konverguje, startujeme-li dostatečně blízko optima x^* .

Rád konvergence:

Pro velké k můžeme psát

$$x_{k+1} - x^* = M(x_k - x^*)(x_{k-1} - x^*), \quad M = \frac{g''(x^*)}{2g'(x^*)}$$

Potom pro $\varepsilon_k = x_k - x^*$ platí

$$\varepsilon_{k+1} = M\varepsilon_k\varepsilon_{k-1}$$

METODA KVADRATICKÉ INTERPOLACE

Nevyžaduje znalost derivací zkoumané funkce.

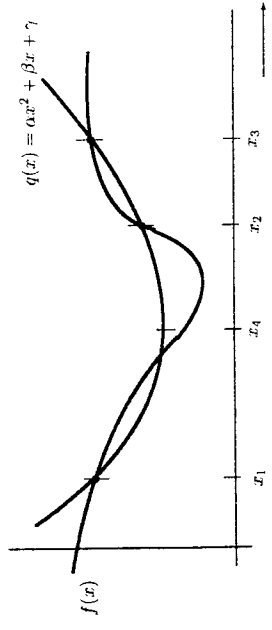
Vycházíme ze znalosti funkčních hodnot ve třech bodech x_1, x_2 a x_3 .

Body $f_1 = f(x_1), f_2 = f(x_2), f_3 = f(x_3)$ proložíme kvadratickou funkcí - viz obr.

$$q(x) = f_1 \frac{(x - x_2)(x_1 - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + f_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + f_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Nyní určíme bod x_4 , ve kterém je nulová první derivace funkce $q(x)$

$$x_4 = \frac{1}{2} \frac{(x_2^2 - x_3^2)f(x_1) + (x_3^2 - x_1^2)f(x_2) + (x_1^2 - x_2^2)f(x_3)}{(x_2 - x_3)f(x_1) + (x_3 - x_1)f(x_2) + (x_1 - x_2)f(x_3)}$$



Logaritmováním předchozí rovnice dostaneme pro $z_k = \log M\varepsilon_k$ diferenciální rovnici pro z_k

$$z_{k+1} = z_k + z_{k-1},$$

což je Fibonacciho rovnice. Pro ni platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_{k+1}}{z_k} = \lambda_1, \quad \lambda_1 = 1.618$$

Odtud

$$z_{k+1} - \lambda_1 z_k \rightarrow 0$$

Tudíž

$$\log M\varepsilon_{k+1} - \lambda_1 \log M\varepsilon_k \rightarrow 0, \quad \text{a proto} \quad \log \frac{M\varepsilon_{k+1}}{(M\varepsilon_k)^{\lambda_1}} \rightarrow 0$$

Proto konečně platí

$$\frac{\varepsilon_{k+1}}{(\varepsilon_k)^{\lambda_1}} \rightarrow M^{(\lambda_1 - 1)} = konst.$$

Tím je dokázán řád konvergence $p = \lambda_1 = 1.618$ metody Regula falsi.

Ze čtyř bodů vynecháme ten, ve kterém je zkoumaná funkce maximální

Ze zbylých tří bodů opakujeme algoritmus.

Metoda kvadratické interpolace konverguje s řádem konvergence 1.3.

Modifikace této metody podle Daviese, Swanna a Campeyho:

Bod x_2 se volí uprostřed bodů x_1 a x_3 .

Pak pro minimum kvadratické aproximace

$$x_4 = x_2 + \frac{\Delta x}{2} \frac{f(x_1) - f(x_3)}{f(x_1) - 2f(x_2) + f(x_3)},$$

kde $\Delta x = x_2 - x_1$.

Další krok: Vypočtený bod x_4 se zvolí středem nového intervalu a

krajní body se určí ve stejné vzdálenosti na obě strany od bodu x_4 .

METODA KUBICKÉ INTERPOLACE

Metoda kubické aproximace vychází ze znalosti funkčních hodnot spolu s derivacemi ve dvou bodech zkoumané funkce.

V bodech x_k a x_{k-1} známe $f(x_k), f'(x_k)$ a $f(x_{k-1}), f'(x_{k-1})$.

Volíme aproximační polynom třetího řádu.

Minimum aproximačního polynomu $q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ nastává v bodě

$$x = \frac{-2b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a} \quad \text{pro} \quad 4b^2 - 12ac \geq 0$$

Minimum kubického interpolačního polynomu určené z $f_k = f(x_k)$, $f'_k = f'(x_k)$ a $f_{k-1} = f(x_{k-1})$, $f'_{k-1} = f'(x_{k-1})$ je v bodě

$$x_{k+1} = x_k - g$$

$$\begin{aligned} e &= x_k - x_{k-1} \\ z &= \frac{f_{k-1} - f_k}{3} + f'_{k-1} + f'_k, \quad w = \sqrt{\frac{z^2 - f'_{k-1}f'_k}{f'_k + w - z}}, \quad g = e \frac{f'_k - f_{k-1} + 2w}{f'_k - f_{k-1} + 2w} \end{aligned}$$

Řád konvergence metody kubické interpolace je pouze dva.

Globální konvergence při kvadratické nebo kubické aproximaci je zaručena, pokud $f(x_{k+1}) < f(x_k)$.

Různé aproximační funkce - spliny.

NEPŘESNÉ ALGORITMY JEDNOROZMĚROVÉ OPTIMALIZACE

Algoritmy jednorozměrového hledání jsou často dříčtiny vícerozměrové optimalizace.

Iteračním postupem, který musíme ukončit po konečném počtu iterací, nedosáhneme přesně hledané minimum.

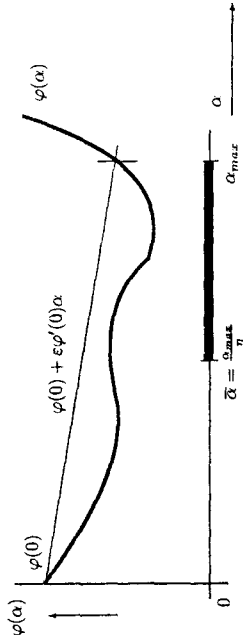
Je-li takový algoritmus součástí složitějšího algoritmu, je třeba zaručit, že se celý algoritmus nezhroutí, když použijeme nepřesný dříčtinový algoritmus jednorozměrového hledání.

Armíův test

Při jednorozměrové optimalizaci hledané α nesmí být ani příliš malé, ani příliš velké.

Definujeme funkci

$$\varphi(\alpha) = f(x_k + \alpha s_k)$$



Obrázek 7: Armíův test

Lineární funkce $\varphi(0) + \varepsilon \varphi'(0) \alpha$ pro určité ε z intervalu $0 < \varepsilon < 1$ (vhodná volba je $\varepsilon = 0.2$).

V obr. polopřímka vycházející z bodu $\varphi(0)$ se sklonem $\varepsilon \varphi'(0)$.

Podmínka uzavřenosti jednorozměrového algoritmu:

Pro funkci $f(x)$ dány dva vektory - počáteční vektor x a směr s .

Předpokládáme, že z bodu x provádíme jednorozměrové hledání na polopřímce ve směru s .

Předpokládáme, že minimum v daném směru skutečně existuje.

Definujeme zobrazení z prostoru $\mathbb{R}^{2n}$ do prostoru $\mathbb{R}^n$

$$S(x, s) = \left\{ y : y = x + \alpha s \text{ pro nějaké } \alpha \geq 0, f(y) = \min_{0 \leq \alpha \leq \infty} f(x + \alpha s) \right\}$$

Přechod zobrazení je uzavřený v (x, s) je-li funkce f spojitá a $s \neq 0$.

Procentní test

Hledaný parametr α určujeme pouze s určitou přesností vzhledem k jeho správné hodnotě.

Volíme např. konstantu c , $0 < c < 1$ (vhodná hodnota je $c = 0.1$) a parametr α

spĺňuje omezení $|\alpha - \alpha^*| \leq c \alpha^*$, kde α^* je jeho optimální hodnota.

Tento algoritmus je uzavřený. Toto kritérium můžeme použít při kvadratické nebo kubické interpolaci.

Hodnota α není příliš velká, když

$$\varphi(\alpha) \leq \varphi(0) + \varepsilon \varphi'(0) \alpha$$

Aby α nebylo příliš malé, volíme $\eta > 1$ (vhodná volba je $\eta = 2$).

Parametr α není považován za příliš malý

$$\varphi(\eta \alpha) > \varphi(0) + \varepsilon \varphi'(0) \eta \alpha$$

To znamená, že když α zvětšíme η -krát, pak už není splněn přechodový test.

Při Armíověmu testu vycházíme z libovolného α .

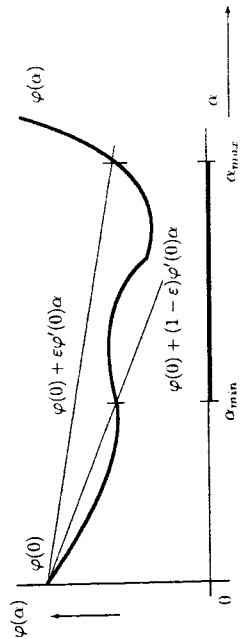
Spĺňuje-li test, zvětšíme ho η -krát tak dlouho, až test není splněn.

Pak vhodné α je to největší (předposlední), které test splnilo.

Pokud první zvolené α nespĺňuje test, pak je opakovaně děleno η .

Goldsteinův test

Vycházíme z Armiova testu, který určuje, zda hledané α není příliš velké.
Zde volíme ε v intervalu $0 < \varepsilon < 0.5$.
Hodnota hledaného parametru α není považována za příliš malou, je-li splněn Goldsteinův test $\varphi(\alpha) > \varphi(0) + (1 - \varepsilon)\varphi'(0)\alpha$



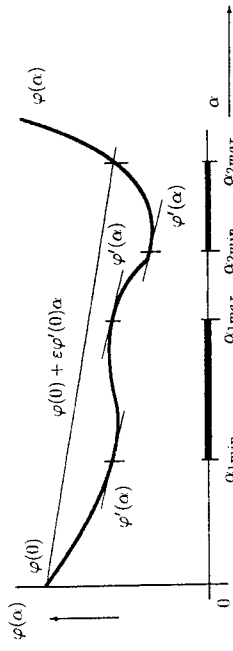
$\varphi(\alpha)$ musí ležet nad přímkou se směrnici $(1 - \varepsilon)\varphi'(0)$ - viz obr..
Oblast přijatelných α je znázorněna tučně.
Goldsteinův test je uzavřený jednorozměrový algoritmus.

NUMERICKÉ METODY BEZ OMEZENÍ
KOMPARATIVNÍ METODY (METODY PŘÍMÉHO HLEDÁNÍ)

Gaussova-Seidlova metoda

Metoda cyklické záměny proměnných.
Víceřozměrovou optimalizaci převedeme na posloupnost jednorozměrových optimalizací ve směru jednotlivých souřadnic.
Výhoda - jednoduchost, nevýhoda - pomalý výpočet, nezaručená konvergence (nepoužívá se).
Je dokázáno, že cyklické hledání podél libovolné množiny lineárně nezávislých směrů nezaručuje konvergenci.

Wolfeho test



Obrázek 8: Wolfeho test

Tento test je výhodný, můžeme-li snadno určit derivace kritériální funkce.
 ε zvoleno v intervalu $0 < \varepsilon < 0.5$ a α pak musí vyhovovat Armiovu testu a $\varphi'(\alpha) \geq (1 - \varepsilon)\varphi'(0)$
Oblast přijatelných α je znázorněna tučně.

Metody přímé komparace

Volíme počáteční bod $x^{(0)}$ a přírůstek Δx .
Dostaneme posloupnost bodů

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \pm \Delta x_1 \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}, x^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \pm \Delta x_1 \\ x_2^{(1)} \pm \Delta x_2 \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix}, \dots, x^{(n)} = \begin{bmatrix} x_1^{(n-1)} \\ x_2^{(n-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(n-1)} \pm \Delta x_n \end{bmatrix}$$

Přírůstek Δx_i může být i nulový.
Modifikace metody pomocí vektoru úspěšného směru
 $s = [\Delta x_1, -\Delta x_2, 0, \dots, \Delta x_n]$.
Znaménka, případně nuly, jsou podle úspěšného či neúspěšného směru.
Potom provedeme expanzi ve směru vektoru s .
Postupně pro $\alpha = 1, 2, \dots$ počítáme $f(x + \alpha s)$ tak dlouho, pokud nastává pokles kritériální funkce.
Pokud přírůstek Δx je příliš velký, provedeme redukci, Δx zmenšíme na polovinu.

METODA PRAVIDELNÉHO A FLEXIBILNÍHO SIMPLEXU

Simplex - konvexní polyedr - konvexní obal $n + 1$ bodů $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n+1)}$.

Simplex v rovině je trojúhelník, v třírozměrném prostoru je to čtyřstěn atd..

Z těchto bodů vynecháním nejhoršího a konstrukcí nového bodu vytvoříme nový simplex, to je další iteraci simplexové metody.

Simplexová metoda je metoda heuristická - velmi jednoduchá, názorná a snadno implementovatelná.

Pravidelný simplex vytvoříme z bodů

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = x^{(1)} + \begin{bmatrix} d \\ d \\ \vdots \\ d \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad x^{(n+1)} = x^{(1)} + \begin{bmatrix} d \\ d \\ \vdots \\ e \end{bmatrix},$$

kde $x^{(1)}$ je libovolně zvolený bod v prostoru $\mathbb{R}^n$ a konstanty d a e

$$d = a \frac{\sqrt{(n+1)+1}}{n\sqrt{2}}, \quad e = d + \frac{a}{\sqrt{2}},$$

a je délka hrany pravidelného simplexu.

- **Kontrakce:** Je-li naopak novém bodě $\hat{x}^{(k)}$, který vznikl reflexí, hodnota kritériální funkce větší než v ostatních bodech simplexu

$$f(\hat{x}^{(k)}) > \max_{i=1, \dots, n+1, i \neq k} \{f(x^{(i)})\},$$

je simplex příliš velký. Provedeme kontrakci simplexu

$$\hat{x}^{(k)} = \alpha + \beta[c - x^{(k)}], \quad \beta < 1, \quad (\beta = 0.5)$$

- **Redukce:** Celková redukce velikosti simplexu - z bodů tvořících simplex vybereme nejvýhodnější bod $x^{(j)}$

$$j = \arg \min_i f(x^{(i)})$$

Vrcholy nového, redukovaného, simplexu

$$x_{\text{new}}^{(i)} = x^{(j)} + \gamma[x^{(i)} - x^{(j)}],$$

kde koeficient redukce $\gamma < 1$ obvykle $\gamma = 0.5$.

Iterační výpočet podle simplexového algoritmu s proměnným simplexem ukončíme, když

$$\sum_{i=1, i \neq k}^{n+1} (f(x^{(i)}) - f(\hat{x}^{(k)})) \leq \varepsilon,$$

ε - zvolená přesnost nalezení minima.

Má-li minimalizovaná funkce největší (nejhorší) hodnotu v bodě $x^{(k)}$, $k = \arg \max_i f(x^{(i)})$ nahradíme tento bod novým bodem

$$\hat{x}^{(k)} = x^{(k)} + 2 \left[c - x^{(k)} \right] = 2c - x^{(k)}, \quad c = \frac{1}{n} \left(-x^{(k)} + \sum_{i=1}^{n+1} x^{(i)} \right).$$

Bod c je těžistiše bodů $x^{(i)}$ s vynecháním bodu nejhoršího $x^{(k)}$.

Bod $\hat{x}^{(k)}$ je reflexní bod, ležící na polopřímce vycházející z bodu $x^{(k)}$ a procházející středem c . Tento bod je umístěn symetricky k nejhoršímu bodu $x^{(k)}$ vzhledem k c .

Tím dostaneme opět množinu $n + 1$ bodů, které tvoří nový simplex.

Rychlost a přesnost nalezení optimálního bodu závisí na velikosti simplexu.

Čím větší je simplex, tím se rychleji blížíme k optimu.

Přesnost výpočtu naopak vyžaduje malou velikost simplexu.

Podle Nelder a Meada je možno měnit velikost simplexu pomocí expanze, kontrakce nebo redukce základního simplexu.

Metoda proměnného (flexibilního) simplexu:

- **Expanze:** Je-li v novém bodě $\hat{x}^{(k)}$, který vznikl reflexí, minimální hodnota kritériální funkce

$$f(\hat{x}^{(k)}) \leq \min_{i=1, \dots, n+1} \{f(x^{(i)})\},$$

směr reflexe je úspěšný - provedeme expanzi simplexu ve směru reflexe a nový vrchol simplexu volíme v bodě

$$\hat{x}^{(k)} = c + \alpha[c - x^{(k)}], \quad \alpha > 1 \quad (\alpha = 2, \alpha = 3).$$

NUMERICKÉ METODY

NELINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ II.

První a druhá derivace funkce $f(x)$

$$\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right)^T = H(x - x^*) = g(x), \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = H$$

Za proměnnou x dosadíme další iteraci $x = x_k - \alpha_k g_k = x_{k+1}$. Pak

$$f(x_{k+1}) = f(x^*) + \frac{1}{2}(x_k - \alpha_k g_k - x^*)^T H(x_k - \alpha_k g_k - x^*) = \Phi(\alpha_k),$$

kde funkce $\Phi(\alpha_k)$ je funkcí α_k pro pevné x_k a x^* .

Optimální α_k - derivace funkce $\Phi(\alpha_k)$ podle α_k je rovna nule

$$\frac{\partial \Phi(\alpha_k)}{\partial \alpha_k} = \alpha_k g_k^T H g_k - g_k^T H(x_k - x^*) = 0 \implies \alpha_k = \frac{g_k^T H(x_k - x^*)}{g_k^T H g_k} = \frac{g_k^T g_k}{g_k^T H g_k}$$

Algoritmus metody nejrychlejšího sestupu

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g_k^T g_k}{g_k^T H g_k} g_k$$

GRADIENTNÍ METODY

Směr hledání je úměrný gradientu zkoumané funkce.

Gradient funkce $f(x)$ v bodě x_k značíme $g(x_k) = \text{grad } f(x_k)$.

Je to sloupcový vektor ($g(x_k) = \nabla f(x_k)$). Jednodušší značení g_k . Iterační algoritmus při minimalizaci funkce $f(x)$ je

$$x_{k+1} = x_k - \alpha g_k, \quad \alpha > 0$$

Podle volby α rozlišujeme různé typy gradientních metod:

- Nalezeme α_k optimální. Tato metoda se nazývá **metoda nejrychlejšího sestupu (steepest descent)**.
- Konstanta α_k závisí na velikosti gradientu - **jednorozměrová optimalizace ve směru gradientu**.
- Volíme pevné $\alpha_k = \alpha$, dostaneme potom gradientní metodu s pevným krokem. Nemáme zaručenou konvergenci algoritmu a proto se tato varianta nepoužívá.

ad 1) Optimální α_k určíme z podmínky

$$\frac{\partial f(x_k - \alpha_k g_k)}{\partial \alpha_k} = 0$$

Funkci $f(x)$ aproximujeme kvadratickou funkcí

$$f(x) = f(x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^T H(x - x^*),$$

kde matice H (Hessova matice) je pozitivně definitní a minimum funkce $f(x)$ je v bodě x^* .

ad 2) Optimální α_k hledáme pomocí algoritmů jednorozměrového hledání

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha \geq 0} f(x_k - \alpha g_k)$$

V reálných problémech nenalezneme přesně optimální hodnotu α_k a ani to není nutné.

Je třeba zaručit celkovou konvergenci gradientního algoritmu.

Proto v každé iteraci musí nastat pokles hodnotící funkce $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$ a zároveň parametr α_k nesmí být příliš malý, aby byla zaručena celková konvergence algoritmu.

- Omezení hledání optimálního α_k na určitý interval $\alpha \in [0, s]$, pro zvolený skálár s . Pak tedy

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha \in [0, s]} f(x_k - \alpha g_k)$$

Zdlouhavě, proto určitá pravidla

- Volíme pevné číslo $a > 0$ a α_k volit rovné a tak dlouho, dokud $f(x_k - \alpha_k g_k) < f(x_k)$.

Pokud nerovnost pro nějaké k přestane platit, pak redukuje $\alpha_k = \beta \alpha$, ($0 < \beta < 1$).

Tato jednoduchá metoda ale nezaručuje konvergenci algoritmu - redukce kritéria v každém kroku není dostatečná, aby zaručovala konvergenci algoritmu.

- Abychom se vyhnuli potížím s konvergencí použijeme **Armiovo pravidlo**.

Volíme tedy pevné skaláry $\alpha, \beta \in (0, 1), \varepsilon \in (0, 1)$.

Položíme $\alpha_k = \beta^{m_k} a$, kde m_k je první celé číslo m , pro které platí

$$\varphi(\alpha_k) = f(x_k - \alpha_k g_k) - f(x_k) \leq -\varepsilon \alpha_k g_k^T g_k$$

Volíme tedy α_k postupně rovně $\beta^a a, \beta^1 a$ až $\beta^{m_k} a$.

Obvykle volíme $a = 1, \beta \in [0.5, 0.1], 0 \leq \varepsilon \leq 0.5$, obvykle $0.1 \leq \varepsilon \leq 0.3$.

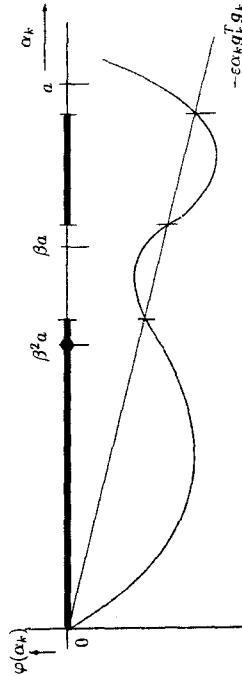
Tímto způsobem nejíme spokojení pouze s redukcí, ale redukce kritéria musí být dostatečná - úměrná gradientu.

Platí $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \frac{dx}{d\alpha} = -g_k^T g_k$.

Množina přijatelných řešení podle Armiovy metody je v obr. vyznačena tučně.

Množina přijatelných řešení tvoří interval, ale $\alpha_k = \beta^a a$ vždy nalezneme.

Přijaté řešení je v obr. vyznačeno černou tečkou.



Pro nalezení α_k je možno použít i Goldsteinovo pravidlo nebo metodu kvadratické či kubické interpolace.

Uvažujme kvadratický případ (funkce $f(x) = f(x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^T H(x - x^*)$) a metodu nejrychlejšího sestupu

$$\frac{f(x_{k+1}) - f(x^*)}{f(x_k) - f(x^*)} = \frac{(x_k - \alpha_k g_k - x^*)^T H(x_k - \alpha_k g_k - x^*)}{(x_k - x^*)^T H(x_k - x^*)}$$

označme $x_k - x^* = y, g_k = g, \alpha_k = \alpha$, pak

$$\frac{f(x_{k+1}) - f(x^*)}{f(x_k) - f(x^*)} = \frac{(y - \alpha g)^T H(y - \alpha g)}{(y)^T H(y)} = 1 + \frac{\alpha^2 g^T H g - 2\alpha g^T H y}{y^T H y}$$

Po dosazení za optimální α dostaneme

$$\frac{f(x_{k+1}) - f(x^*)}{f(x_k) - f(x^*)} = 1 + \frac{-\frac{g^T g}{g^T H g} g^T H g - 2 \frac{g^T g}{g^T H g} g^T H y}{y^T H y}$$

Protože $H y = g$ dostaneme

$$\frac{f(x_{k+1}) - f(x^*)}{f(x_k) - f(x^*)} = 1 - \frac{g_k^T g_k}{g_k^T H^{-1} g_k g_k^T H g_k}$$

Zjednodušení předchozího výrazu dostaneme na základě Kantorovičovy nerovnosti.

Věta: Kantorovičova nerovnost

Nechť Q je pozitivně definitní symetrická matice. Pak pro libovolný vektor x platí

$$\frac{x^T x}{x^T Q x} \geq \frac{4aA}{(a+A)^2}$$

kde a, A je nejmenší a největší vlastní číslo matice Q .

Směry hledání pomocí gradientní metody nejrychlejšího sestupu jsou na sebe kolmé.

Platí $g_{k+1}^T g_k = 0$.

Platnost předchozího vztahu prokážeme pro kvadratické funkce. Platí

$$g_{k+1}^T g_k = [H(x_k - \alpha_k g_k - x^*)]^T H(x_k - x^*)$$

Po úpravě

$$\underbrace{(x_k - x^*)^T H(x_k - x^*)}_{g_k^T} \underbrace{H(x_k - x^*)}_{g_k} - \underbrace{g_k^T g_k}_{g_k^T H g_k} \underbrace{H(x_k - x^*)}_{g_k} = 0.$$

Konvergence gradientního algoritmu.

Algoritmus gradientní metody $(x_{k+1} = P(x_k))$ můžeme dekomponovat do dvou na sebe navazujících algoritmů $P = S \cdot G$.

Algoritmus $G : E^n \rightarrow E^{2n}$ definovaný $G(x) = (x; -g(x))$ nám dá počáteční bod a směr hledání.

Algoritmus S je algoritmus jednorozměrného hledání ve směru negativního gradientu. Je to tedy zobrazení $S : E^{2n} \rightarrow E^n$

$$S(x, s) = \left\{ \begin{array}{l} y : y = x + \alpha s : \alpha \geq 0, f(y) = \min_{\alpha \geq 0} f(x + \alpha s) \end{array} \right\}$$

Tento algoritmus je uzavřený pokud $s \neq 0$ a algoritmus G je spojitý. Proto je algoritmus P uzavřený.

Algoritmus generuje klesající posloupnost (pro $g(x_k) \neq 0$).

Protože jsou splněny předpoklady věty o globální konvergenci, algoritmus gradientní metody konverguje.

Rychlost konvergence gradientní metody.

Důkaz:
Nechť $0 \leq a = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = A$, (λ_i jsou vlastní čísla matice Q). Vhodnou volbou soufadnic lze matici Q diagonalizovat. Pak ale

$$x^T x = \sum x_i^2, \quad x^T Q x = \sum \lambda_i x_i^2, \quad x^T Q^{-1} x = \sum \frac{1}{\lambda_i} x_i^2$$

Zavedeme $\theta_1 = \frac{x_1^2}{\sum x_i^2}$ a definujeme funkce

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{\sum \theta_i \lambda_i}, \quad \Psi(\theta) = \sum \frac{\theta_i}{\lambda_i}$$

Pak

$$\frac{x^T x}{x^T Q x} = \frac{\sum x_i^2}{\sum \lambda_i x_i^2} = \frac{1}{\sum \frac{\lambda_i x_i^2}{\sum x_i^2}} = \frac{1}{\sum \frac{\lambda_i}{\sum \frac{x_i^2}{\sum x_i^2}}} = \frac{1}{\sum \frac{\lambda_i}{\theta_i}} = \frac{\Phi(\theta)}{\Psi(\theta)}$$

Protože $\sum \theta_i = 1$ jsou funkce $\Phi(\theta), \Psi(\theta)$ konvexní kombinace λ_i , nebo $\frac{1}{\lambda_i}$.

Minimální hodnota poměru Φ/Ψ je dosažena pro nějaké $\lambda = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_n \lambda_n$, kde λ_1, λ_n jsou po řadě nejmenší a největší vlastní čísla matice Q a $\alpha_1 + \alpha_n = 1$. Platí

$$\frac{\alpha_1}{\lambda_1} + \frac{\alpha_n}{\lambda_n} = \frac{\lambda_1 + \lambda_n - \alpha_1 \lambda_1 - \alpha_n \lambda_n}{\lambda_1 \lambda_n} = \frac{\lambda_1 + \lambda_n - \lambda}{\lambda_1 \lambda_n}$$

Pak

$$\frac{\Phi(\theta)}{\Psi(\theta)} \geq \min_{\lambda \in (\lambda_1, \lambda_n)} \frac{1}{\frac{\lambda_1 \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n - \lambda}} = \min \frac{\lambda_1 \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n - \lambda}$$

Minimum předchozího výrazu je v bodě $\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{2}$, proto

$$\frac{\Phi(\theta)}{\Psi(\theta)} \geq \frac{4\lambda_1\lambda_n}{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}$$

□

Věta:

Metoda nejrychlejšího sestupu konverguje v kvadratickém případě pro libovolný počáteční bod $x_0 \in E^n$ k jedinému minimu x^* a pro všechna k platí

$$\frac{f(x_{k+1}) - f(x^*)}{f(x_k) - f(x^*)} \leq \frac{(A - a)^2}{(A + a)^2}$$

kde a, A jsou po řadě nejmenší a největší vlastní čísla matice H kvadratické formy.

□

Předchozí tvrzení platí, neboť

$$\frac{f(x_{k+1}) - f(x^*)}{f(x_k) - f(x^*)} \leq 1 - \frac{4aA}{(A + a)^2} = \frac{A^2 + 2aA + a^2 - 4aA}{(A + a)^2} = \frac{(A - a)^2}{(A + a)^2}$$

Proto metoda nejrychlejšího sestupu konverguje lineárně s poměrem konvergence nejvýše

$$\left(\frac{A - a}{A + a}\right)^2 = \left(\frac{r - 1}{r + 1}\right)^2, \text{ kde } r = \frac{A}{a} \geq 1 \text{ je číslo podmíněnosti matice } H \text{ kvadratické formy.}$$

V obecném případě nekvalitické funkce $f(x)$ nahradíme matici H maticí druhých derivací $\nabla^2 f(x_k)$ - čistý tvar Newtonovy metody

$$x_{k+1} = x_k - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} g(x_k)$$

V obecném případě nekvalitické funkce $f(x)$, pokud jsme daleko od minima, je kvadratická aproximace nepřesná a Hessova matice může být singulární nebo i negativně definitní.

Newtonovou metodou můžeme nalézt i maximum, protože Newtonova metoda hledá stacionární bod.

Proto se používá modifikace Newtonovy metody:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} g(x_k)$$

Newtonův směr hledání $s_k = -[\nabla^2 f(x_k)]^{-1} g(x_k)$, pak iterací postup

$$x_{k+1} = x_k - \alpha s_k$$

Modifikovaná gradientní metoda

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k S_k g(x_k)$$

kde S_k je nějaká symetrická matice.

Věta o lokální konvergenci pro čistou Newtonovu metodu :

Nechť funkce $f(x)$ má spojitě třetí parciální derivace, dále předpokládáme, že v lokálním minimu x^* je Hessova matice $\nabla^2 f(x^*) = H(x^*) > 0$. Potom, je-li počáteční bod dostatečně blízko k x , posloupnost bodů generovaná Newtonovou metodou konverguje k x^* . Řád konvergence Newtonovy metody je alespoň 2.

□

Nekvadratický případ řeší následující věta:

Věta:

Předpokládáme, že funkce $f(x)$ má spojitě druhé parciální derivace a má relativní minimum v bodě x^* .

Dále předpokládáme, že Hessova matice $H(x^*)$ má minimální vlastní číslo $a \geq 0$ a maximální vlastní číslo A .

Jestliže $\{x_k\}$ je posloupnost generovaná metodou nejrychlejšího sestupu, která konverguje k x^* , pak posloupnost $\{f(x_k)\}$ konverguje k $f(x^*)$ lineárně s poměrem konvergence, který není větší než $\left(\frac{A - a}{A + a}\right)^2$.

□

NEWTONOVA METODA A JEJÍ MODIFIKACE

Hledáme minimum funkce $f(x)$ pro $x \in E^n$.

Funkci $f(x)$ aproximujeme kvadratickou funkcí

$$f(x) \doteq f(x_k) + g_k^T (x - x_k) + \frac{1}{2} (x - x_k)^T H(x - x_k)$$

x_{k+1} dostaneme z podmínky nulovosti první derivace předchozí funkce, pak

$$\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right)^T = g_k + H(x - x_k) = 0$$

Odtud

$$x_{k+1} = x_k - H^{-1} g_k$$

Důkaz : Předpokládáme, že pro body x a y v nějakém δ -okolí bodu x^* platí

$$\|H(x) - H(y)\| \leq \beta_1 \|x - y\|, \quad \|(H(x))^{-1}\| \leq \beta_2$$

odtud

$$\|H(x) - H(y)\| \|x - y\| \leq \beta_1 \|x - y\|^2.$$

Gradient $g(x_k)$ můžeme v δ -okolí bodu x^* vyjádřit

$$g(x_k) = g(x^*) + H(\bar{x})(x_k - x^*) = H(\bar{x})(x_k - x^*)$$

kde $\bar{x} \in (x_k, x^*)$. Poslední úprava v předchozím vztahu platí, neboť $g(x^*) = 0$. Pak

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\| &= \|x_k - (H(x_k))^{-1} g(x_k) - x^*\| \\ &= \|(H(x_k))^{-1} [H(x_k)(x_k - x^*) - g(x_k)]\| \\ &\leq \beta_2 \|H(x_k)(x_k - x^*) - H(\bar{x})(x_k - x^*)\|^2 \end{aligned}$$

Proto platí

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \beta_1 \beta_2 \|x_k - x^*\|^2$$

a lokální kvadratická konvergence algoritmu je dokázána.

□

S globální konvergencí Newtonovy metody to není moc dobré.

Jaké jsou nedostatky čisté Newtonovy metody

- inverze Hessovy matice $H(x_k)$ nemusí existovat
 - čistá Newtonova metoda nemusí zajišťovat klesání - může nastat $f(x_{k+1}) > f(x_k)$
 - konečně čistá Newtonova metoda může konvergovat k maximu
- Ani modifikovaná Newtonova metoda všechny nedostatky neodstraní.
Proto je pro globální konvergenci třeba upravit Newtonovu metodu.

- Směr hledání s_k se získá řešením

$$H_k s_k = -g_k$$

Aby řešení existovalo provedeme modifikaci

$$[H_k + \Delta_k] s_k = -g_k$$

kde diagonální matici Δ_k volíme tak, aby matice $(H_k + \Delta_k)$ byla pozitivně definitní.

Tuto modifikaci provedeme vždy, když Newtonův směr neexistuje, nebo to není směr klesání.

NELINEÁRNÍ NEJMENŠÍ ČTVERCE

Metoda nelineárních nejmenších čtverců řeší problém minimalizace funkce $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{2} \|h(x)\|^2 = \frac{1}{2} h^T(x) h(x)$$

kde $h(x)$ je nelineární funkce.

Numerická metoda, která se nazývá **Gaussova-Newtonova metoda**, je založena na linearizaci funkce $h(x)$ v bodě x_k

$$h(x) \doteq h(x_k) + \nabla h(x_k)^T (x - x_k)$$

Novou iteraci získáme minimalizací normy lineární aproximace (místo $h(x_k)$ píšeme h_k)

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \left[h_k + \nabla h_k^T (x - x_k) \right]^T \left[h_k + \nabla h_k^T (x - x_k) \right] \\ &= \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \left[h_k^T h_k + 2 (x - x_k)^T \nabla h_k^T h_k + (x - x_k)^T \nabla h_k \nabla h_k^T (x - x_k) \right] \end{aligned}$$

Odtud po doplnění na úplný čtverec dostaneme minimální hodnotu předchozího výrazu

$$x_{k+1} = x_k - \left(\nabla h_k \nabla h_k^T \right)^{-1} (\nabla h_k) h_k$$

Toto je čistý tvar **Gaussovy - Newtonovy metody**.

- Můžeme také provést omezený Newtonův krok, který získáme minimalizací

$$f(x_k + s) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^T s + \frac{1}{2} s^T \nabla^2 f(x_k) s$$

v nějakém okolí x_k . Tomuto okolí se říká **oblast důvěry** (trust region). Pak

$$s_k = \arg \min_{\|s\| \leq \gamma_k} f(x_k + s)$$

kde γ_k je nějaká kladná konstanta. Omezený krok zaručuje klesání pro γ_k dostatečně malé.

Problémem je volba oblasti důvěry γ_k .

Rozumné je zvolit počáteční hodnotu γ_k a zvětšit ji, když iterace postupují úspěšně a naopak ji zmenšit, když jsou iterace neúspěšné.

Úspěšnost iterací můžeme hodnotit podle poměru skutečného a predikovaného zlepšení

$$r_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k+1})}{f(x_k) - f(x_k + s_k)}$$

kde $f(x_k + s_k)$ je hodnota získaná kvadratickou aproximací. Pokud $r_k \rightarrow 1$ je možno zvětšit γ , proto $\gamma_{k+1} > \gamma_k$.

Lze ukázat, že tato omezená Newtonova metoda také řeší problém

$$[H_k + \delta_k I] s_k = -g_k$$

kde I je jednotková matice a δ_k je nezáporný skalár.

Pokud je matice $(\nabla h_k \nabla h_k)^T$ singulární, pak ji regularizujeme volbou diagonální matice Δ_k , aby matice $(\nabla h_k \nabla h_k^T + \Delta_k)$ byla pozitivně definitní.

Je-li diagonální matice $\Delta_k = \alpha_k I$, ($\alpha_k > 0$) dostaneme tzv. **Levenbergovu - Marquardovu metodu**.

Iterační algoritmus podle Levenberga-Marquardia

$$x_{k+1} = x_k - \left(\nabla h_k \nabla h_k^T + \alpha_k I \right)^{-1} (\nabla h_k) h_k$$

Je-li koeficient α_k malý, metoda se blíží Gauss - Newtonově metodě,

je-li koeficient $\alpha_k \rightarrow \infty$, pak se blížíme metodě nejrychlejšího sestupu.

Problémem je volba vhodného koeficientu α_k .

Nejprve musí být dostatečně veliký, abychom se dostatečně rychle blížili k optimu a

pokud jsme blízko optima, pak naopak musí být malý, abychom zaručili konvergenci algoritmu.

Nelineární nejmenší čtverce mají řadu praktických aplikací speciálně v nelineární estimaci a aproximaci.

Příklad: Trénování neuronových sítí
Neuronová síť reprezentuje model nelineárního systému.
Neuronová síť se skládá z vícevrstevných perceptronů.

Nechť tedy neuronová síť má N vrstev. Každá vrstva, kterou budeme označovat indexem $k = 0, \dots, N - 1$ je tvořena n_k aktivními jednotkami - které jsou popsány nelineárním zobrazením mezi jedním vstupním a jedním výstupním signálem - $\phi(\xi)$.

Užívané nelineární funkce jsou na příklad

$$\phi(\xi) = \frac{1}{1 + e^{-\xi}}, \text{ sigmoidální funkce}$$

$$\phi(\xi) = \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{e^{\xi} + e^{-\xi}}, \text{ funkce hyperbolický tangens}$$

Vstupem do j -té aktivční jednotky je lineární kombinace signálů $(x_1^k, \dots, x_{n_k}^k)$, které jsou výstupem z předchozí vrstvy.

Tyto signály tvoří vektor x_k .

Výstup j -té aktivční jednotky v $(k + 1)$ vrstvě je signál, který označíme x_{k+1}^j . Platí

$$x_{k+1}^j = \phi \left(\sum_{s=1}^{n_k} \alpha_{k+1}^{js} x_k^s \right), \quad j = 1, \dots, n_{k+1},$$

kde váhy α_{k+1}^{js} je třeba určit.

Určení vah vede na řešení problému nelineárních nejmenších čtverců.

Tento proces se také nazývá učení nebo také trénování neuronové sítě. Váhy ve všech vrstvách a ve všech jednotkách tvoří vektor vah

$$\alpha = \left\{ \alpha_{k+1}^{js} : k = 0, \dots, N - 1, s = 0, \dots, n_k, j = 1, \dots, n_{k+1} \right\}$$

METODY KONJUGOVANÝCH SMĚRŮ

- Vyuvinuty proto, aby urychlily konvergenci gradientních metod
- Vyhynuly se potížím spojeným s modifikací Newtonovy metody
- Jsou to výpočetní postupy, které konvergují po konečném počtu kroků (samozřejmě při minimalizaci kvadratické funkce)

Definice konjugovaných vektorů:

Vektory $s_1, \dots, s_p$ jsou konjugované k symetrické matici Q , když platí

$$s_i^T Q s_j = 0, \quad \forall i, j, \quad i \neq j$$

□

Uvažujme kvadratickou funkci $f(x) = a^T x + \frac{1}{2} x^T H x$. Pak platí následující tvrzení:

Věta:

Jsou-li $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$ nenulové vektory konjugované vzhledem k matici H , pak pro každé $x_0 \in R^n$ a

$$x_{k+1} = x_k + \alpha s_k,$$

kde $\alpha = \alpha_k$ je voleno tak, aby

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha} f(x_k + \alpha s_k)$$

platí, že $x_n = x^*$.

□

Metoda konjugovaných směrů konverguje v kvadratickém případě nejvýše v n krocích.

Pro daný vektor vah α a vstupní vektor $u = x_0$ do první vrstvy produkuje neuronová síť jediný výstupní vektor $y = x_N$ z N -té vrstvy.

Celá neuronová síť realizuje tedy nelineární zobrazení vstupního vektoru $u = x_0$ na výstupní vektor $y = x_N$ a toto zobrazení je parametrizováno vektorem vah α . Pak

$$y = x_N = f(\alpha, x_0) = f(\alpha, u).$$

Předpokládejme, že známe m párů vstupních a výstupních signálů $(u_1, y_1), \dots, (u_m, y_m)$ změřených na reálném objektu. Naším cílem je pomocí neuronové sítě vytvořit model objektu, který by reagoval stejně jako reálný objekt.

Chceme tedy natrénovat neuronovou síť tak, aby odchylky výstupu neuronové sítě a výstupu reálného objektu $e_i = y_i - f(\alpha, u_i)$ byly co nejmenší pro všechny i -té dvojice vstupního a výstupního signálu.

To realizujeme určením vah α , které minimalizují součet kvadrátů chyb

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \|y_i - f(\alpha, u_i)\|^2 = \arg \min_{\alpha} e^T(\alpha) e(\alpha)$$

kde vektor $e(\alpha)$ je vektor chyb, který je nelineárně závislý na váhách α . Učení neuronové sítě vede tedy na problém nelineárních nejmenších čtverců.

Konstruktivní důkaz:

Pokud platí předchozí věta, pak

$$x^* = x_0 + \alpha_0 s_0 + \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_{n-1} s_{n-1}$$

První dva členy na pravé straně předchozí rovnice jsou rovny x_1 , první tři členy jsou rovny x_2 , atd..

$$x^* - x_0 = \alpha_0 s_0 + \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_{n-1} s_{n-1}$$

Předchozí rovnici budeme zleva násobit vektorem $s_k^T H$ a protože jsou směry s_i konjugované, platí

$$s_k^T H (x^* - x_0) = \alpha_k s_k^T H s_k.$$

Proto

$$\alpha_k = \frac{s_k^T H (x^* - x_0)}{s_k^T H s_k}$$

Pro libovolné k platí také

$$x_k - x_0 = \alpha_0 s_0 + \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_{k-1} s_{k-1}$$

Předchozí rovnici budeme opět zleva násobit vektorem $s_k^T H$

$$s_k^T H (x_k - x_0) = 0, \quad \Rightarrow \quad s_k^T H x_k = s_k^T H x_0$$

Proto

$$\alpha_k = \frac{s_k^T H x^* - s_k^T H x_0}{s_k^T H s_k} = \frac{s_k^T H x^* - s_k^T H x_k}{s_k^T H s_k}$$

Gradient naší kvadratické funkce je

$$g_k = a + H x_k, \quad g(x^*) = 0 = a + H x^*$$

Výraz pro α_k upravíme do konečného tvaru

$$\alpha_k = \frac{s_k^T (Hx_k^* - Hx_k)}{s_k^T H s_k} = \frac{s_k^T (-a - g_k + a)}{s_k^T H s_k} = -\frac{s_k^T g_k}{s_k^T H s_k}$$

Tento výraz pro α_k je ale totožný s optimálním α_k určeným podle

$$\arg \min_a f(x_k + \alpha s_k) = \arg \min_a \left(a^T (x_k + \alpha s_k) + \frac{1}{2} (x_k + \alpha s_k)^T H (x_k + \alpha s_k) \right)$$

□

V obecném případě nekvalitrické funkce $f(x)$ místo matice H uvažujeme matici $\nabla^2 f(x)$.

Pro kvadratický případ platí $g_k^T s_i = 0$ pro $i < k$, což znamená, že směry g_k a s_i jsou navzájem kolmé.

Platnost tohoto vztahu ukážeme ve dvou krocích. Nejprve, je-li i o jednotku menší než k , pak

$$g_{k+1}^T s_k = (a + Hx_{k+1})^T s_k = (a + Hx_k + \alpha H s_k)^T s_k = (a + Hx_k)^T s_k + \alpha s_k^T H s_k = g_k^T s_k - \frac{s_k^T g_k}{s_k^T H s_k} H s_k = 0$$

V obecném případě pro $i < k$ platí

$$g_{k+1}^T s_i = (a + Hx_{k+1})^T s_i = (a + Hx_k)^T s_i + \alpha s_k^T H s_i = g_k^T s_i$$

protože směry s_i jsou konjugované směry.

Protože $g_{k+1}^T s_i = g_k^T s_i$, pak také $g_k^T s_i = g_{k-1}^T s_i$ až $g_{i+1}^T s_i = 0$.

Po dosazení dostaneme

$$s_{k+1}^T H s_i = -g_{k+1}^T H s_i + \beta_k s_k^T H s_i = 0, \quad \text{pro } i \leq k$$

Pro $i = k$ to platí, neboť právě podle tohoto vztahu β_k určeno.

Pro $i \leq k$ jsou oba členy nulové, čili $g_{k+1}^T H s_i = 0$ a také $s_k^T H s_i = 0$.

Pro nekvalitrický případ nutno počítat gradient i Hessovu matici.

Metoda konjugovaných směrů pak bohužel není globálně konvergentní, to znamená, že samozřejmě není ani konvergentní v konečném počtu kroků.

Proto po n nebo $n + 1$ krocích nutno provést reinitializaci, to znamená nastartovat metodu konjugovaných gradientů od počátku znovu, neboť metoda startuje s čistým gradientním krokem.

Abychom se vyhnuli nutnosti výpočtu Hessovy matice druhých derivací, která se vyskytuje ve výpočtu velikosti kroku α_k , provádí se výpočet α_k pomocí algoritmu jednorozměrného hledání.

Výpočet koeficientu β_k se provádí podle jiných vztahů, ve kterých se nevyskytuje Hessova matice.

METODA KONJUGOVANÝCH GRADIENTŮ

V předchozím odstavci jsme řešili problém generování konjugovaných směrů.

Ukážeme, jak se konjugované směry generují z gradientů a dosavadního směru pohybu.

Metoda konjugovaných gradientů je tedy speciální metodou konjugovaných směrů.

Algoritmus konjugované gradientní metody:

- Startujeme z libovolného bodu $x_0 \in R^n$. První směr s_0 je ve směru záporného gradientu

$$s_0 = -g_0 = -a - Hx_0$$

poslední rovnost platí pro kvadratický případ $f(x) = a^T x + \frac{1}{2} x^T H x$.

- Obecně platí

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k, \quad \text{kde } \alpha_k = \frac{g_k^T s_k}{s_k^T H s_k}$$

- Nový konjugovaný směr je

$$s_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k s_k$$

kde β_k je optimální, $\beta_k = \arg \min_{\beta} f(x_{k+1} + \alpha_k (-g_{k+1} + \beta s_k))$. Pak

$$\beta_k = \frac{g_{k+1}^T H s_k}{s_k^T H s_k}$$

Směry s_i jsou konjugované směry, platí tedy $s_{k+1}^T H s_i = 0$, pro $i \leq k$.

□

Metoda Fletchera a Reevese.

Výpočet α_k se provádí algoritmy jednorozměrného hledání a výpočet β_k je dle vztahu

$$\beta_k = \frac{g_{k+1}^T g_{k+1}}{g_k^T g_k}$$

Přitom po n krocích se provádí reinitializace.

Metoda Polaka a Ribiera.

Koeficient β_k se určuje podle

$$\beta_k = \frac{(g_{k+1} - g_k)^T g_{k+1}}{g_k^T g_k}$$

Přitom po n krocích se opět provádí reinitializace.

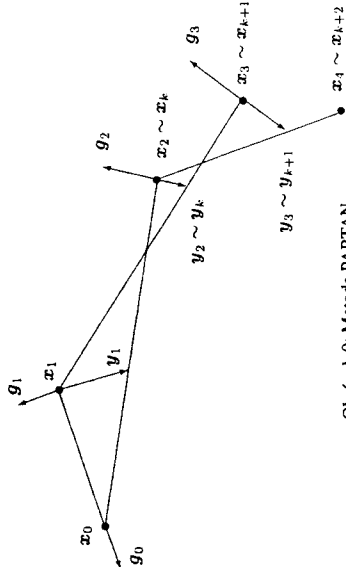
Simulace prokazují, že nejvýhodnější je metoda Polaka a Ribiera.

Jiná metoda konjugovaných směrů - Metoda paralelních tečen, nebo krátce metoda PARTAN.

Motivací k této metodě bylo to, že gradientní metoda nejrychlejšího sestupu generuje směry sestupu, které jsou navzájem kolmé.

Někdy se tento jev označuje názorně jako postup "cik - cak".

V metodě PARTAN se dělá zrychlený krok, který se odvozuje z gradientu a předchozího směru.



Obrázek 9: Metoda PARTAN

Algorithmus metody PARTAN je následující - viz obr. :

KVAZI-NEWTONOVSKÉ METODY

Kvazi-newtonovské metody jsou gradientní metody - mezi metodou nejrychlejšího sestupu a Newtonovou metodou.

Gradientní metody mají zaručenou konvergenci a

Newtonova metoda má v okolí optima řád konvergence rovný dvěma.

Newtonova metoda ale vyžaduje výpočet Hessovy matice, spíše její inverze.

Modifikovaná Newtonova metoda

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k S_k \nabla f(x_k)$$

kde S_k je symetrická matice a α_k se volí takové, aby $x_{k+1}(\alpha)$ bylo minimální.

Je-li matice S_k rovná inverzi Hessovy matice, pak se jedná o modifikaci Newtonovy metody, je-li $S_k = I$, pak se jedná o metodu nejrychlejšího sestupu.

Aby to byl klesající algoritmus, je nutné, aby matice S_k byla pozitivně definitní.

Protože modifikovaná Newtonova metoda se blíží gradientní metodě, bude i její konvergence podobná konvergenci gradientní metody.

Pro kvadratický případ minimalizace

$$f(x) = \frac{1}{2}(x - x^*)^T H(x - x^*),$$

můžeme pro modifikovanou Newtonovu metodu určit optimální krok α_k

$$\alpha_k = \frac{g_k^T S_k g_k}{g_k^T S_k H S_k g_k}, \quad g_k = H(x_k - x^*)$$

Věta: Konvergence modifikované Newtonovy metody.

Pro algoritmus modifikované Newtonovy metody platí v kvadratickém případě pro každé k

$$f(x_{k+1}) \leq \left(\frac{A_k - a_k}{A_k} \right)^2 f(x_k)$$

kde A_k, a_k jsou po řadě největší a nejmenší vlastní čísla matice $S_k H$.

□

Konvergence modifikované Newtonovy metody je lineární a poloměr konvergence závisí na maximálním a minimálním vlastním čísle matice $S_k H$.

Klasická modifikovaná Newtonova metoda:

V ní se Hessova matice $H(x_k)$ neurčuje znova v každém kroku.

Algoritmus je následující

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k (H(x_0))^{-1} \nabla f(x_k)$$

Inverze Hessovy matice se provádí pouze v počátečním bodě x_0 .

Kvazi - newtonovské metody - inverzi Hessiany matice nebo její aproximaci konstruujeme užítím informace získávané během iteračního procesu.

Nechť funkce $f(x)$ má spojitě druhé derivace.

V bodech x_{k+1} a x_k určme gradienty $g_{k+1} = \nabla f(x_{k+1})$, $g_k = \nabla f(x_k)$ a definujeme vektor

$$d_k = x_{k+1} - x_k.$$

Potom Hessianu matici aproximujeme podle vztahu

$$g_{k+1} - g_k = H(x_k)(x_{k+1} - x_k) = H(x_k)d_k$$

Je-li Hessianova matice konstantní, jak je tomu v kvadratickém případě, pak, zavedeme-li vektor $q_k = g_{k+1} - g_k$, platí $q_k = Hd_k$.

Máme-li tedy n nezávislých směrů $d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$ a jim odpovídající gradienty g_i a z toho plynoucí vektory $q_i = g_{i+1} - g_i$, pak

$$H = QD^{-1}, \quad D = [d_0, \dots, d_{n-1}], \quad Q = [q_0, \dots, q_{n-1}]$$

Algoritmus není iterační. Spíše potřebujeme určit inverzi Hessiany matice.

Hledáme-li aproximaci S_{k+1} inverze Hessiany matice založené na datech z jednotlivých kroků iteračního algoritmu, pak chceme, aby platilo

$$S_{k+1}q_i = d_i, \quad 0 \leq i \leq k.$$

Pak pro $k = n - 1$ je $S_n = H^{-1}$.

Iterační postup má mnoho řešení.

Platí to pro $i = k$ a také i pro $i < k$.

Proto, když Hessianova matice je konstantní, matice S_k konverguje k H^{-1} v nejvyšší n krocích.

Potřetí při aplikaci algoritmu je nutnost zachovat v jednotlivých krocích pozitivní definitnost matice S_k .

Proto musí platit $q_k^T(d_k - S_k q_k) > 0$, což ale obecně není garantováno.

Metoda Davidona, Fletchera a Powella

Jiný postup je korekce aproximace inverze Hessiany matice matiči hodnoty dvě.

Metodu navrhl Davidon a později rozvinuli Fletcher a Powelllem (DFF metoda).

Metodu startujeme z libovolného počátečního bodu x_0 a libovolné symetrické pozitivně definitní matice S_0 .

Iterace

$$x_{k+1} = \arg \min_x f(x) + \alpha s_k$$

kde směr $s_k = -S_k g_k$.

Vektor g_k je vektor gradientu a matice S_k

$$S_{k+1} = S_k + \frac{d_k d_k^T}{d_k^T q_k} - \frac{S_k q_k q_k^T S_k}{q_k^T S_k q_k}, \quad q_k = g_{k+1} - g_k.$$

Při minimalizaci kvadratické funkce jsou vektory s_i konjugované vzhledem k Hessianu matici.

Metoda DFF je tedy metoda konjugovaných směrů a pro $S_0 = I$ je to metoda konjugovaných gradientů.

Korekce pomocí matice s jednotkovou hodnotostí

Aproximaci inverze Hessiany matice budeme provádět iteračně podle vztahu

$$S_{k+1} = S_k + a_k z_k z_k^T$$

kde a_k je nějaká konstanta a z_k je nějaký vektor.

Matice $z_k z_k^T$ je čtvercová matice hodnotostí jedna (dyáda).

Z $S_{k+1}q_i = d_i$ platí pro $i = k$

$$d_k = S_{k+1}q_k = S_k q_k + a_k z_k z_k^T q_k$$

Předchozí vztah násobíme zleva vektorem q_k^T

$$q_k^T d_k - q_k^T S_k q_k = a_k (z_k^T q_k)^2$$

Odtud dostaneme a později využijeme

$$a_k (z_k^T q_k)^2 = q_k^T (d_k - S_k q_k)$$

Nyní odvodíme iterační algoritmus

$$S_{k+1} = S_k + a_k z_k z_k^T = S_k + \frac{a_k^2 (z_k^T q_k)^2}{a_k (z_k^T q_k)} z_k z_k^T = S_k + \frac{a_k^2 z_k (z_k^T q_k q_k^T z_k)}{q_k^T (d_k - S_k q_k)} z_k^T$$

Odtud konečně

$$S_{k+1} = S_k + \frac{(d_k - S_k q_k)(d_k - S_k q_k)^T}{q_k^T (d_k - S_k q_k)}$$

Broydenovy metody

Zaměříme-li vektory d_k a q_k , pak vlastně nehlédáme inverzi Hessianu, ale Hessianu matici.

Potom tedy místo matice S_k aktualizujeme nějakou jinou symetrickou matici Q_k .

Potom po záměně vektorů pro ni platí

$$Q_{k+1} = Q_k + \frac{q_k q_k^T}{q_k^T d_k} - \frac{Q_k d_k d_k^T Q_k}{d_k^T Q_k d_k}$$

Je to aktualizace Broydena, Fletchera, Goldfarba a Shannona - aktualizace BFGS.

Poznámka: V některých pramenech se uvádí jiný vztah pro aktualizaci Hessiany matice podle BFGS

$$Q_{k+1} = Q_k + \frac{q_k q_k^T}{q_k^T d_k} - \frac{Q_k Q_k}{d_k^T Q_k d_k}$$

Inverzi matice Q_k provedeme podle věty o maticové inverzi

$$\left[A + ab^T \right]^{-1} = A^{-1} + \frac{A^{-1} ab^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1} a}$$

kde A je $n \times n$ matice a a, b jsou n -rozměrné vektory.

Předchozí formule platí, když všechny inverze existují.

Všeu o maticové inverzi musíme v našem případě použít dvakrát.

Aktualizace inverze Hessiany matice

$$S_{k+1} = S_k + \left(1 + \frac{q_k^T S_k q_k}{q_k^T d_k} \right) \frac{d_k d_k^T}{d_k^T d_k} - \frac{d_k q_k^T S_k + S_k q_k d_k^T}{q_k^T d_k}$$

Numerické simulace ukazují, že tato metoda dává lepší výsledky než metoda DFP. Obě metody korigují v další iteraci odhad Hessianovy matice maticí hodnoty dvě.

Je možno definovat celou třídu metod **Broydenových**

$$S^{\varphi} = (1 - \varphi) S^{DFP} + \varphi S^{BFGS}$$

kde S^{DFP} je aktualizace inverze Hessianovy matice podle metody DFP obdobně S^{BFGS} je aktualizace inverze Hessianovy matice podle metody BFGS a φ je reálný, obvykle nezáporný, parametr. V těchto metodách velice záleží na kvalitě algoritmu jednorozměrového hledání parametru α .

Metoda se obvykle znovu startuje po m krocích, kde $m < n$.

Metody tohoto typu jsou globálně konvergentní a lokálně konvergují superlineárně.

10

NUMERICKÉ METODY

NELINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ III.

METODY PŘÍPUSTNÝCH SMĚRŮ

Vyjďeme z přípustného bodu x_k .

Směr s_k je přípustný směr v bodě x_k , když

1. existuje $\bar{\alpha}$ takové, že bod $x_k + \alpha s_k$ je přípustný bod pro všechna α v intervalu $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$
2. nový bod $x_{k+1} = x_k + \alpha s_k$ zajišťuje klesání hodnotí funkce pro nějaké α z určeného intervalu, pak $f(x_k + \alpha s_k) < f(x_k)$

Problém - někdy nemusí existovat přípustný směr a metoda není globálně konvergentní.

Jsou-li omezení úlohy lineární, přípustný směr lze nalézt lineárním programováním (*Zoutendijkova metoda*).

Problém

$$\min \{ f(x) : Ax \leq b; x \geq 0 \}$$

Aby přípustný směr zajišťoval klesání hodnotí funkce, musí svírat tupý úhel s gradientem v příslušném bodě.

Proto přípustný směr musí splňovat:

$$A(x_k + s_k) \leq b, \quad x_k + s_k \geq 0, \quad \nabla f(x_k)^T s_k < 0.$$

To řešíme lineárním programováním ve tvaru

$$\max_{s_k} \{ -\nabla f(x_k)^T s_k : As_k \leq b - Ax_k, s_k \geq -x_k \}$$

Po nalezení přípustného směru nalezneme další bod pomocí algoritmu jednorozměrového hledání ve směru s_k

$$x_{k+1} = \arg \min_{\alpha} f(x_k + \alpha s_k)$$

NUMERICKÉ METODY S OMEZENÍM

Primární metody jsou metody, které používají původní formulaci problému.

Hledají optimum v dovoleném rozsahu proměnných, to znamená, že stále (v každé iteraci) řešení je přípustné.

Pokud ukončíme výpočet, dosažené řešení je přípustné a leží zřejmě blízko optima.

Mezi nevýhody těchto metod počítáme nutnost nalezení přípustného bodu při startu primárních metod a nalezení přípustného směru, abychoom neporušili omezení.

Tyto metody obvykle nevyužívají speciální strukturu problému a jsou proto použitelné pro obecné problémy nelineárního programování. Rychlost konvergence těchto metod je srovnatelná s druhými metodami.

Dualní metody využívají nutné podmínky optima. Používají Lagrangeovy koeficienty. Řeší problém obvykle v jiné dimenzi.

Primární metody

- metoda přípustných směrů
- metoda aktivních množin
- metoda projekce gradientu
- metoda redukovaného gradientu
- metody penalizačních a bariérových funkcí a s nimi související
- metody vnitřního bodu (interior point methods)

Nejvýznamnější dualní je metoda kvadratického programování (SQP - Sequential Quadratic Programming).

METODY AKTIVNÍCH MNOŽIN

Omezení ve tvaru nerovnosti rozdělíme na dvě skupiny - aktivní omezení a neaktivní omezení.

V aktivních omezeních jsou nerovnosti splněny jako rovnosti a proto musí být brány v úvahu.

Neaktivní omezení jsou ta omezení, která naopak nejsou splněna jako rovnosti a mohou proto být úplně ignorována.

Problém

$$\min \{ f(x) : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \}$$

Pro některá i jsou omezení splněna jako rovnosti. Tato i tvoří množinu aktivních omezení - označíme ji A .

Ostatní omezení můžeme ignorovat.

Problém je nyní

$$\min \{ f(x) : g_i(x) = 0, i \in A \}$$

Nevíme, která omezení nakonec budou aktivní a která nikoliv, proto si zvolíme na počátku iteracího řešení nějakou množinu W aktivních omezení - pracovní množina.

Při řešení vycházíme z nějakého bodu x , který vyhovuje omezením $g_i(x) = 0, i \in W$ a $g_i(x) < 0, i \notin W$.

Pak hledáme minimum funkce $f(x)$ na pracovním podprostoru určeným množinou aktivních omezení.

Přitom mohou nastat dvě možnosti.

1. Při hledání je nutno ověřovat, zda ostatní omezení jsou splněna.

Pokud narazíme na hranici určenou omezením, které není v množině aktivních omezení, tak toto omezení je nutno zahrnout do množiny aktivních omezení.

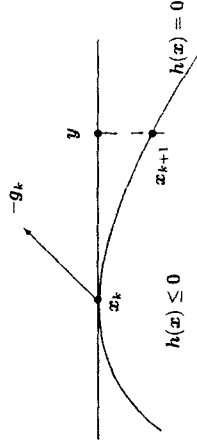
Tímto způsobem roste pracovní množina aktivních omezení.

Pokud jsou omezení nelineární, $h(x) \leq 0$, v bodě x_k je linearizujeme, určíme aktivní omezení a vytvoříme projekci záporného gradientu funkce $f(x_k)$ do téčného podprostoru určeného těmito aktivními omezeními - viz obr.

Jsou-li aktivní omezení určena vzhledem $h(x_k) = 0$ je projekční matice P_k analogicky určena

$$P = [-I + \nabla h(x_k) (\nabla h(x_k))^T \nabla h(x_k)]^{-1} \nabla h(x_k)^T$$

Při tom může nastat situace znázorněná na obr. Vlivem křivosti nelineárních omezení padne takto získaný bod, (který označíme jako bod y), mimo omezení, nesplňuje tedy podmínku $h(y) = 0$ pro některé $h_i(x)$.



Obrázek 10: Projekce bodu y na množinu omezení

Postup:

Nejprve získáme bod y pomocí projekce negativního gradientu do linearizace aktivních omezení - pomocí projekční matice P_k .

Potom ve směru kolmém k tečné nadrovině promítneme bod y do množiny omezení.

Hledáme tedy bod $x_{k+1} = y + \nabla h(x_k) \alpha$ takový, aby $h(x_{k+1}) = 0$.

METODA REDUKOVANÉHO GRADIENTU

V roce 1963 navržen Wolfem pro lineární omezení a v roce 1965 Carpentierem pro nelineární omezení.

Souvisejí se simplexovou metodou lineárního programování a s metodou projekce gradientu. Ve shodě se simplexovou metodou se i v této metodě proměnné dělí na báze a nezávislé.

Uvažujeme nejprve lineární omezení

$$\min \{f(x) : Ax = b, x \geq 0\}$$

m lineárních omezení předpokládáme ve standardním tvaru.

Předpokládáme, že problém není degenerovaný, libovolná množina m řádků matice A je lineárně nezávislá).

Potom libovolné přípustné řešení má nejvýše $n - m$ proměnných nulových.

Vektor proměnných rozdělíme na dvě části $x = [u^T, v^T]^T$, kde subvektor u má dimenzi m .

Obdobně rozdělíme matice $A = [B, C]$ kde submatice B je čtvercová regulární matice rozměru $m \times m$.

Původní problém je nyní

$$\min \{f(u, v) : Bu + Cv = b, u \geq 0, v \geq 0\}$$

Proměnnou u vypočítáme

$$u = B^{-1}b - B^{-1}Cv$$

To nalezneme linearizací omezení. V bodě x_{k+1} platí

$$h_i(x_{k+1}) = 0 = h_i(y + \nabla h_i(x_k) \alpha) \doteq h_i(y) + \nabla h_i(x_k)^T \nabla h_i(x_k) \alpha$$

Aproximace platí pro $|\alpha| \cdot \|y - x_k\|$ malé. Z podmínky $h_i(x_{k+1}) = 0$ určíme

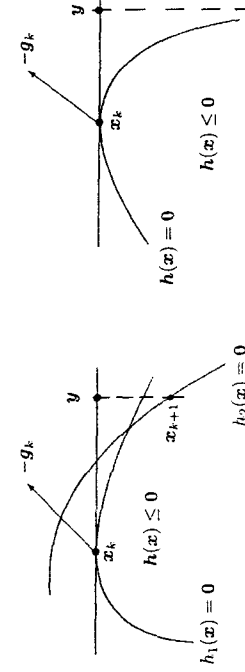
$$\alpha = -[\nabla h_i(x_k)^T \nabla h_i(x_k)]^{-1} h_i(y)$$

a další iteraci

$$x_{k+1} = y - \nabla h_i(x_k) [\nabla h_i(x_k)^T \nabla h_i(x_k)]^{-1} h_i(y)$$

Je zřejmé, že se během iteracího postupu mohou uplatnit další omezení - viz obr., případně průmět bodu y do množiny omezení nemusí existovat - viz obr..

Proto při implementaci metody je třeba provést řadu modifikací. Bylo zjištěno, že metoda má lineární konvergenci.



Obrázek 11: Problémy při projekci bodu y na množinu omezení

Potom přírůstek kritéria vyjádříme pomocí gradientu kritéria vzhledem k proměnné v , to je pomocí tzv. redukovaného gradientu

$$\begin{aligned} df(u, v) &= \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} du + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} dv = \nabla_u f(u, v)^T du + \nabla_v f(u, v)^T dv \\ &= \nabla_v f(u, v)^T dv - \nabla_u f(u, v)^T B^{-1} C dv = [\nabla_v f(u, v)^T - \nabla_u f(u, v)^T B^{-1} C]^T dv \end{aligned}$$

Redukovaný gradient $g^{(r)}$ funkce $f(u, v)$ je vektor rozměru $(n - m)$

$$g^{(r)} = \left(\frac{df(u, v)}{dv} \right)^T = [\nabla_v f(u, v) - \nabla_u f(u, v) B^{-1} C]^T$$

Nulové podmínky prvního řádu pro optimalitu jsou splněny právě tehdy, když

$$g_i^{(r)} = 0, \text{ pro všechny } v_i > 0$$

$$g_i^{(r)} \geq 0, \text{ pro všechny } v_i = 0.$$

To je zřejmé z následující úvahy:

Přírůstek kritéria je zřejmě $df(u, v) = [g^{(r)}]^T dv$.

Podle nutných podmínek je přírůstek nezáporný v optimálním bodě.

Pokud je $v_i > 0$, pak přírůstek dv může být libovolný a proto musí být v optimu odpovídající složka gradientu nulová.

Je-li naopak $v_i = 0$, pak přírůstek dv musí být pouze nezáporný (pro dodržení omezení) a proto musí být v optimu odpovídající složka gradientu nezáporná.

Nyní určíme tzv. promítnutý redukovaný gradient s jehož složky jsou

$$s_i = \begin{cases} 0 & \text{pro } v_i = 0, \text{ a } g_i^{(r)} > 0 \\ -g_i^{(r)} & \text{jinak} \end{cases}$$

Ve směru s provádíme jednorozměrovou minimalizaci a určujeme nové body

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= v_k + \alpha s \\ u_{k+1} &= u_k - \alpha B^{-1} C s \end{aligned}$$

a optimální

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha} f(u_{k+1}, v_{k+1})$$

Pokud u_{k+1} a v_{k+1} jsou přípustné body, pak pokračujeme v nové iteraci výpočtem nového redukovaného gradientu a_{k+1} .

Pokud při jednorozměrové minimalizaci narazíme pro nějaké $\bar{\alpha} < \alpha^*$ na omezení, (některá složka vektorů u_{k+1} nebo v_{k+1} se stane nulovou), pak:

1. pokud se stane nulovou některá složka vektoru v_{k+1} , pak položíme $\alpha^* := \bar{\alpha}$ a pokračujeme další iterací.
2. pokud se stane nulovou složka vektoru u_{k+1} , pak položíme opět $\alpha^* := \bar{\alpha}$, ale současně musíme změnit rozdělení vektoru x na dva subvektory u a v .
Příslušnou nulovou složku vektoru u_{k+1} přesuneme do množiny složek vektoru v a naopak některou nenulovou složku vektoru v_{k+1} zase přesuneme do množiny složek vektoru u . Proto odpovídajícím způsobem změníme rozdělení matice A na submatice B a C .

METODY POKUTOVÝCH A BARIÉROVÝCH FUNKCÍ

Problém optimalizace s omezením se aproximuje problémem optimalizace bez omezení.

Penalizační metody aproximují původní problém s omezením problémem bez omezení, při čemž za vybočení z omezení platíme "penále".

Penále či pokuta je zde **vnější pokutová funkce**.

Bariérové metody aproximují původní problém s omezením problémem bez omezení přidáním členu, který nás penalizuje, pokud se blížíme k hranici omezení.

V tomto případě se jedná o **vnitřní pokutovou funkci**.

METODY POKUTOVÝCH FUNKCÍ

Optimalizace s omezením

$$\min \{f(x) : g(x) \leq 0\}$$

Penalizační (pokutová) funkce $P(t)$ s vlastností $P(t) > 0$ pro $t > 0$ a $P(t) = 0$ pro $t \leq 0$.

Pomocí penalizační funkce $P(t)$ aproximují předchozí problém optimalizace s omezením problémem bez omezení

$$\min \left\{ f(x) + \alpha \sum_{i=1}^m P(g_i(x)) \right\}$$

kde α je dostatečně velká kladná konstanta.

Pokud jsou omezení nelineární

$$\min \{f(x) : g(x) = 0, x \geq 0\}$$

Vektor proměnných opět rozdělíme na dvě části $x = [u^T, v^T]^T$, kde subvektor u má dimenzi m , která je rovna počtu omezení.

Nelineární omezení v bodě x_k linearizujeme. Z omezení $g(x_k) = 0$ plyne pro přírůstky

$$dg = \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv = 0.$$

Odtud

$$du = - \left[\frac{\partial g}{\partial u} \right]^{-1} \frac{\partial g}{\partial v} dv$$

Přírůstek kritéria je potom roven

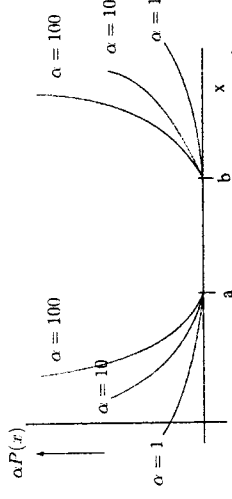
$$df(u, v) = \nabla_u f(u, v)^T du + \nabla_v f(u, v)^T dv = \nabla_v f(u, v)^T dv - \nabla_u f(u, v)^T \left[\frac{\partial g}{\partial u} \right]^{-1} \frac{\partial g}{\partial v} dv$$

Redukovaný gradient funkce $f(u, v)$, který označíme $g^{(r)}$ je vektor rozměru $n - m$

$$g^{(r)} = \left(\frac{df(u, v)}{dv} \right)^T = \left[\nabla_v f(u, v)^T - \nabla_u f(u, v)^T \left[\frac{\partial g}{\partial u} \right]^{-1} \frac{\partial g}{\partial v} \right]^T$$

Další postup jako v lineárním případě.

Funkce $P(t)$ je na příklad $P(t) = \max\{0, t\}^2$



Obrázek 12: Pokutové funkce $\alpha P(x)$ při omezení $a \leq x \leq b$.

Pro omezení ve tvaru rovnosti můžeme volit pokutovou funkci $P(t) = t^2$.

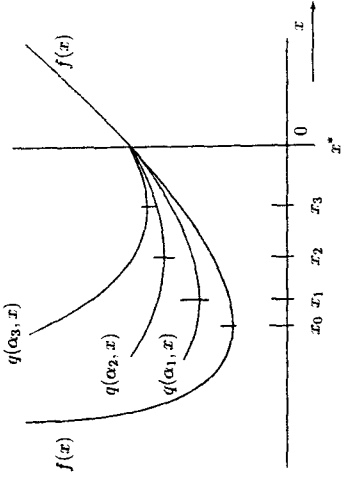
Pokud $\alpha >> 0$, tak omezení budou přibližně splněna.

Pro $\alpha \rightarrow \infty$ bude řešení konvergovat k řešení původního problému s omezením.

Postup řešení:

Pro rostoucí posloupnost koeficientů $\{\alpha_j\}$, kde $\alpha_{j+1} > \alpha_j > 0$ opakovaně řešíme problém bez omezení s penalizační funkcí

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{q(\alpha_j, x)\} = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + \alpha_j \sum_{i=1}^m P(g_i(x)) \right\}$$

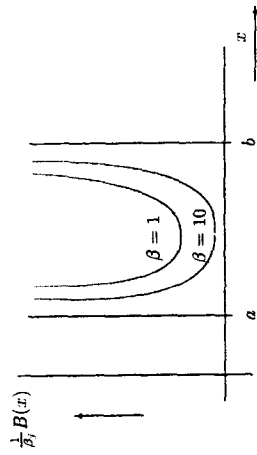


Obrázek 13: Posloupnost řešení problému s pokutovou funkcí při omezení $x \geq 0$.

Každý subproblém má řešení, které označíme x_j . Při tom platí řada zajímavých tvrzení

1. Pro posloupnost řešení jednotlivých problémů platí

$$\begin{aligned} q(\alpha_j, x_j) &\leq q(\alpha_{j+1}, x_{j+1}) \\ P(x_j) &\geq P(x_{j+1}) \\ f(x_j) &\leq f(x_{j+1}) \end{aligned}$$



Obrázek 14: Bariérová funkce $\frac{1}{\beta_j} B(x)$, při omezení $a \leq x \leq b$.

Optimalizační problém

$$\min \{f(x) : g(x) \leq 0\}$$

Bariérová funkce $B(x)$ je definovaná na množině $X = \{x : g(x) \leq 0\}$.

Je to funkce nezáporná a spojitá a $B(x) \rightarrow \infty$, pokud bod x se blíží ke hranici omezení.

Bariérová funkce může být na příklad rovna

$$B = \sum_{i=1}^m B(g_i(x)) = \sum_{i=1}^m \left(-\frac{1}{g_i(x)} \right), \quad \text{nebo} \quad B = \sum_{i=1}^m B(g_i(x)) = \sum_{i=1}^m (-\log(-g_i(x)))$$

2. Je-li x^* optimální řešení původní úlohy s omezeními, pak

$$f(x^*) \geq q(\alpha_j, x_j) \geq f(x_j)$$

3. Jestliže x_j je posloupnost generovaná penalizační metodou, pak limitní bod této posloupnosti je řešením původní úlohy

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(x_j) = f(x^*)$$

Penalizační metody jsou sice velmi jednoduché a v praxi dobře použitelné, ale penalizační funkce obecně velmi zhoršují rychlost konvergence použitých algoritmů.

K minimalizaci problému bez omezení je možno použít libovolnou numerickou metodu.

METODY BARIÉROVÝCH FUNKCÍ

V bariérových metodách platíme penále, když se blížíme k hranici omezení - viz obr..

Přibližování se tedy děje z vnitřního bodu množiny přípustných hodnot. To znamená, že bariérová metoda je použitelná pouze tehdy, má-li množina přípustných hodnot vnitřní body.

Metoda bariérových funkcí nutně musí startovat z vnitřního bodu, takže již při startu metody může nastat problém s nalezením vnitřního bodu.

Postup řešení:

Pro rostoucí posloupnost koeficientů $\{\beta_j\}$, kde $\beta_{j+1} > \beta_j > 0$ řešíme problém bez omezení s bariérovou funkcí

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + \frac{1}{\beta_j} \sum_{i=1}^m B(g_i(x)) \right\}$$

Každý subproblém má pro určité β_j řešení x_j .

Limita posloupnosti řešení x_j pro $\beta \rightarrow \infty$ generovaná bariérovou metodou je řešením původní úlohy.

Musíme ale zajistit, že při iteracím výpočtu neporušíme omezení, neboť mimo omezení není bariérová funkce definována, případně bariérovou funkci musíme dodefinovat $B(x) = \infty$ pro $x \notin X$.

Kombinace penalizační a bariérové funkce je použita v metodě SUMT (Sequential Unconstrained Minimization Technique) - (Fiacco a McCormick 1960).

Optimalizační problém s omezeními

$$\min \{f(x) : g(x) \leq 0, h(x) = 0\}$$

převědeme na sekvenční řešení problému bez omezení

$$\min \left\{ f(x) - \frac{1}{\beta_j} \sum_{i=1}^r \log(-g_i(x)) + \alpha_j \sum_{i=1}^s (h_i(x))^2 \right\}$$

pro rostoucí množinu koeficientů α_j a β_j .

Používá se kombinace penalizační i bariérové metody.

Bariérové metody se staly základem moderních metod zvaných **metody vnitřního bodu**.

METODY VNITŘNÍHO BODU

Metody vnitřního bodu (interior point methods) byly použity poprvé Karmarkarem v roce 1984 pro řešení problému lineárního programování.

Tyto metody vycházejí z metody SUMT.

V roce 1988 byly rozšířeny na obecný problém Něstěrovem a Němirovským.

BARIEROVÁ FUNKCE A ANALYTICKÝ STŘED

Mějme konvexní množinu omezení $g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m$, kde funkce g_i jsou konvexní a hladké. Uvažujme neprázdnou množinu ostrých omezení

$$X = \{x : g_i(x) < 0, i = 1, \dots, m\}.$$

Na této množině si definujeme logaritmickou bariérovou funkci

$$B(x) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^m \log(-g_i(x)), & x \in X \\ \infty & x \notin X \end{cases}$$

Bariérová funkce B je konvexní a hladká na množině X a blíží se bod x blíží ke hranici množiny X .

METODA VNITŘNÍHO BODU

Optimalizační problém

$$\min \{f(x) : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$$

kde funkce g_i jsou hladké a konvexní. Pro $\alpha > 0$ definujeme funkci

$$\alpha f(x) + B(x) = \alpha f(x) - \sum_{i=1}^m \log(-g_i(x))$$

Tato funkce je hladká a konvexní.

Je ztola omezená za předpokladu, že množina $\{x : f(x) \leq \gamma, g_i(x) \leq 0\}$ je pro nějaké γ ohraničená.

Koeficient α je vlastně relativní váha mezi kritériem a bariérovou funkcí.

Definujeme funkci

$$x^*(\alpha) = \arg \min_{x \in X} (\alpha f(x) + B(x))$$

Funkce $x^*(\alpha)$ pro $\alpha > 0$ se nazývá **centrální cesta**.

Pro $\alpha \rightarrow \infty$ vede tato cesta k řešení původního problému.

Body $x^*(\alpha)$ pro určité α můžeme určit Newtonovou metodou, ovšem opět za předpokladu, že je dán přísně přípustný počáteční bod (vnitřní bod množiny omezení).

Určíme bod $x^{(c)}$, který je bodem minima bariérové funkce $B(x)$

$$x^{(c)} = \arg \min_{x \in X} B(x) = \arg \max_{x \in X} \prod_{i=1}^m (-g_i(x))$$

Poznámka: Uvědomme si, že platí

$$x^{(c)} = \arg \min_x \left[-\sum_i \log(-g_i(x)) \right] = \arg \max_x \left[\log \prod_i (-g_i(x)) \right] = \arg \max_x \left[\prod_i (-g_i(x)) \right]$$

Bod $x^{(c)}$ je **analytický střed nerovností** $g_i(x) < 0$.

Tento bod existuje, pokud je množina X ohraničená.

Je to bod, který je robustním řešením množiny nerovností.

Je to vnitřní bod množiny X , který je v jistém smyslu nejvíce vzdálen od hranice oblasti.

Bod $x^{(c)}$ můžeme určit Newtonovou metodou za předpokladu, že známe přísně přípustný počátek bod.

Tak například pro lineární nerovnosti $a_i^T x \leq b_i, i = 1, \dots, m$, je bariérová funkce $B(x) = \sum_{i=1}^m \log(b_i - a_i^T x)$. Konstanta $b_i - a_i^T x > 0$ je rovna "nesplnění" i -té rovnosti.

Metoda řešení optimalizačního problému bez omezení je jednoduchá:

Pro určité $\alpha > 0$ a přísně přípustný bod $x^{(\alpha)}$ určíme Newtonovou metodou bod $x^*(\alpha)$, přičemž startujeme z bodu $x^{(\alpha)}$.

Další iteraci provedeme z nového počátečního bodu $x = x^*(\alpha)$, který je roven právě vypočtenému bodu na centrální cestě.

Pro zvětšené $\alpha := \alpha/\beta$, kde $\beta > 1$ spočítáme nový bod na centrální cestě.

Tímto způsobem získáme posloupnost bodů na centrální cestě, které odpovídají rostoucí hodnotě parametru α .

Posloupnost bodů na centrální cestě, které získáme řešením minimalizačního problému bez omezení, vede na řešení našeho původního problému s omezením.

Složitost metody neroste s počtem omezení. To je podstatný přínos této metody (vlastně všech penalizačních a bariérových metod).

Při tom se vyskytují problémy s volbou počáteční hodnoty parametru α a s volbou koeficientu β , který zajišťuje růst koeficientu α v další iteraci.

Tato volba znamená kompromis, neboť ponalý růst koeficientu α , znamená menší počet kroků Newtonovy metody v jedné iteraci, ale celková konvergence metody k řešení je pomalejší.

SOUVISLOST BODŮ NA CENTRÁLNÍ CESTĚ S DUALITOU

Nutné podmínky pro bod $x^*(\alpha) = \arg \min (\alpha f(x) + B(x))$

$$\alpha \nabla f(x^*(\alpha)) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{-g_i(x^*(\alpha))} \nabla g_i(x^*(\alpha)) = 0$$

Předchozí rovnici upravíme

$$\nabla f(x^*(\alpha)) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*(\alpha)) = 0, \quad \lambda_i = \frac{1}{-g_i(x^*(\alpha))} > 0$$

Odtud plyne, že $x^*(\alpha)$ minimalizuje Lagrangeovu funkci

$$L(x, \lambda) = f(x^*(\alpha)) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x^*(\alpha))$$

Z teorie duality víme, že minimum primárního problému není menší než řešení duálního problému

$$\begin{aligned} f^* \geq \psi(\lambda) &= \min_x L(x, \lambda) = \min_x \left(f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) \right) \\ &= f(x^*(\alpha)) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x^*(\alpha)) \\ &= f(x^*(\alpha)) - \frac{m}{\alpha} \end{aligned}$$

kde jsme optimum původního problému je f^* .

METODA STŘEDŮ

Modifikace předchozí metody - (Method of Centers).

Konvexní optimalizační problém $\min \{f(x) : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$.

Zvolíme si konstantu $\gamma > f^*$, kde f^* je optimální hodnota kritériální funkce.

Definujeme body $x^*(\gamma)$, které jsou analytickými středy nerovností $f(x) < \gamma$, a $g_i(x) < 0$. Platí

$$x^*(\gamma) = \arg \min_{x \in X} \left(-\log(\gamma - f(x)) - \sum_{i=1}^m \log(-g_i(x)) \right)$$

Bod $x^*(\gamma)$ splňuje nutné podmínky

$$\frac{1}{\gamma - f(x^*(\gamma))} \nabla f(x^*(\gamma)) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{-g_i(x^*(\gamma))} \nabla g_i(x^*(\gamma)) = 0$$

Odtud plyne, že bod $x^*(\gamma)$ je na centrální cestě

$$x^*(\gamma) = x^*(\alpha), \quad \alpha = \frac{1}{\gamma - f(x^*(\gamma))}$$

Poznámka: Body x^* rozlišujeme pouze jejich argumenty $(x^*(\gamma), x^*(\alpha))$.

Body $x^*(\gamma), \gamma > f^*$ také parametrizují centrální cestu a poskytují dolní odhad ve tvaru

$$f^* \geq f(x^*(\gamma)) - m(\gamma - f(x^*(\gamma)))$$

To znamená, že bod na centrální cestě nám poskytuje dolní odhad

$$f(x^*(\alpha)) \geq f^* \geq f(x^*(\alpha)) - \frac{m}{\alpha}$$

To použijeme při odhadu přesnosti dosaženého řešení.

Nyní srovnáme nutné podmínky optimality původního problému $\min \{f(x) : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$ s nutnými podmínkami pro bod na centrální cestě.

Konvexní optimalizační problém

$$\min \{f(x) : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$$

má bod optima x^* , právě když existuje vektor $\lambda \geq 0$, že platí (Karushovy - Kuhnovy - Tuckerovy podmínky)

$$\begin{aligned} g_i(x^*) &\leq 0 \\ \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*) &= 0 \\ -\lambda_i g_i(x^*) &= 0 \end{aligned}$$

Z předchozího výkladu plyne, že bod $x^*(\alpha)$ na centrální cestě vyhovuje nutným a postačujícím podmínkám v následujícím tvaru. Existuje vektor $\lambda \geq 0$

$$\begin{aligned} g_i(x^*) &\leq 0 \\ \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*) &= 0 \\ -\lambda_i g_i(x^*) &= \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

Centrální cesta je spojitá deformace podmínek optimality pro původní problém.

Algoritmus metody středu:

- Zvolíme počáteční bod x , parametr γ , koeficient θ a zvolenou přesnost výpočtu (toleranci) ε , které vyhovují $x \in X, \quad \gamma > f(x), \quad 0 < \theta < 1, \quad \varepsilon > 0$
- Pro počáteční bod x vypočteme Newtonovou iterační metodou nový bod $x^*(\gamma)$. Jestliže $m(\gamma - f(x^*(\gamma))) < \varepsilon$, je splněna zvolená přesnost výpočtu a bod $x^*(\gamma)$ je s danou přesností řešením našeho problému.
- Pokud zvolená přesnost není dosažena, pak s novou počáteční podmínkou $x = x^*(\gamma)$ znova Newtonovou metodou řešíme problém s novou hodnotou parametru γ $\gamma := (1 - \theta)f(x) + \theta\gamma, \quad 0 \leq \theta \leq 1$

Koeficient θ je koeficient konvexní kombinace horního odhadu γ kritéria a skutečné hodnoty kritéria $f(x)$.

Čím θ menší, tím více kroků Newtonovy metody k vyřešení $x^*(\gamma) = \arg \min_{x \in X} (-\log(\gamma - f(x)) - \sum_{i=1}^m \log(-g_i(x)))$.

Bylo ověřeno, že zrychlení výpočtu je dosaženo, když použijeme $q > 1$ kopií omezení $f(x) < \gamma$. Potom Newtonovou metodou řešíme problém

$$x^*(\gamma) = \arg \min_{x \in X} \left(-q \log(\gamma - f(x)) - \sum_{i=1}^m \log(-g_i(x)) \right)$$

Dobrá volba je $q \approx m$.

Metody vnitřního bodu jsou v současnosti neefektivnější numerické metody.

Spolu se sekvenčním kvadratickým programováním jsou nejoblíbenějšími numerickými metodami.

Obě metody využívají při důležitých výpočtech řadu dalších numerických metod.

SEKVENČNÍ KVADRATICKÉ PROGRAMOVÁNÍ

Nelineárního programování s omezením ve tvaru rovnosti

$$\min \{ f(x) : h(x) = 0 \}$$

Lagrangeova funkce pro tuto úlohu je $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T h(x)$. Nutné podmínky - nulovost gradientu Lagrangeovy funkce vzhledem k oběma proměnným) - soustava nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + \nabla h(x)\lambda &= 0 \\ h(x) &= 0 \end{aligned}$$

Řešení pomocí QR faktorizace celé matice soustavy
Maticový zápis předchozí soustavy lineárních rovnic

$$\begin{bmatrix} H & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ b \end{bmatrix}$$

Provedeme QR faktorizaci matice soustavy

$$Q \underbrace{R \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}}_s = \begin{bmatrix} -c \\ b \end{bmatrix}$$

kde jsme zavedli pomocný vektor s . Získáme ho řešením soustavy

$$Qs = \begin{bmatrix} -c \\ b \end{bmatrix}, \quad s = Q^T \begin{bmatrix} -c \\ b \end{bmatrix}$$

neboť Q je ortogonální matice ($QQ^T = I$).

Hledané řešení (vektor $\begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}$) získáme snadno řešením soustavy

$$R \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = s$$

neboť matice R je horní trojúhelníková matice.

KVADRATICKÉ PROGRAMOVÁNÍ - (QP)

Kvadratické kritérium s lineárními omezeními - tzv. kvadratické programování - QP.

Prozatím lineární omezení typu rovnosti

$$\min \left\{ f(x) = \frac{1}{2}x^T Hx + c^T x : Ax = b \right\}$$

Nutné podmínky optima $\nabla L = 0$, kde $L(x, \lambda) = \frac{1}{2}x^T Hx + c^T x + \lambda^T (Ax - b)$ - lineární rovnice

$$\begin{aligned} Hx + A^T \lambda + c &= 0 \\ Ax + -b &= 0 \end{aligned}$$

Je-li H regulární a má-li A má plnou řádkovou hodnotu (hod $A = m$) - matice předchozí soustavy je regulární. Nutné podmínky vedou na jediné řešení.

Analytické řešení: Z první rovnice

$$x = -H^{-1}A^T\lambda - H^{-1}c$$

Předchozí rovnici vynásobíme maticí A a výsledek dosadíme do druhé rovnice

$$\lambda = -(AH^{-1}A^T)^{-1} (AH^{-1}c + b)$$

po dosazení do rovnice pro x

$$x = -H^{-1} \left[I - A^T (AH^{-1}A^T)^{-1} AH^{-1} \right] c + H^{-1} A^T (AH^{-1}A^T)^{-1} b$$

Nevhodné pro numerický výpočet.

KVADRATICKÝ OPTIMALIZAČNÍ PROBLÉM S OMEZENÍMI VE TVARU NEROVNOSTI

$$\min \left\{ f(x) = \frac{1}{2}x^T Hx + c^T x : Ax \leq b \right\}$$

Řešení - iterční metoda aktivních množin.

$$\min \left\{ f(x) = \frac{1}{2}x^T Hx + c^T x : a_i x = b_i, i \in E, a_i x \leq b_i, i \in I \right\}$$

kde E je množina omezení typu rovnosti (Equality) a I je množina omezení typu nerovnosti (Inequality).

Omezení typu nerovnosti jsou buď aktivní a ostatní jsou neaktivní.

Protože to na počátku nevíme, pracujeme s tzv. pracovní množinou W .

V ní jsou všechna omezení typu rovnosti a některá omezení typu nerovnosti.

Bod x_k vyhovuje všem omezením a splňuje omezení typu rovnosti pro současnou pracovní množinu W_k .

Množina W_k - všechna omezení typu rovnosti (všechna $i \in E$) a některá omezení typu nerovnosti (některá $i \in I$).

Ekvivalentní tvar

$$\min \left\{ f(x) = f(x_k) + g_k^T (x - x_k) + \frac{1}{2} (x - x_k)^T H (x - x_k) : \begin{aligned} Ax_k &= b \\ Ax &= b \end{aligned} \right\}$$

Řádky matice A jsou tvořeny vektory $a_i^T, i \in W_k$ a k tomu odpovídajícími prvky vektoru b .

Aby oba problémy byly totožné, pak $g_k = c + Hx_k$.

Zavedeme vektor přírůstek $d_k \approx x - x_k$

$$\min \left\{ f(x) = f(d_k) = f(x_k) + g_k^T d_k + \frac{1}{2} d_k^T H d_k : a_i^T d_k = 0, i \in W \right\}$$

Lagrangeova funkce

$$L = f(x_k) + g_k^T d_k + \frac{1}{2} d_k^T H d_k + \sum_{i \in W} \lambda_i a_i^T d_k$$

Nutné podmínky optimality

$$H d_k + A^T \lambda + g_k = 0$$

$$A d_k = 0$$

Řádky matice A jsou rovny vektorům a_i^T , $i \in W$.

Vypočteme přírůstek d_k .

Několik možností:

- $d_k = 0$ - jsme v optimu $x^* = x_k$, neboť to může nastat pouze pro $g_k = 0$.
- $d_k \neq 0$, pak $x_{k+1} = x_k + d_k$.
Je-li x_{k+1} přípustné, pak $k := k + 1$ a provádíme další iteraci s nezměněnou pracovní množinou $W_{k+1} = W_k$.
- Pokud x_{k+1} není přípustné, pak

$$x_{k+1} = x_k + \alpha d_k,$$

kde koeficient $\alpha < 1$ volíme tak velký, až narazíme na nějaká nová omezení.

Řekněme, že je to omezení j -tého, kde $j \notin W$. Pak musí platit

$$a_j^T (x_k + \alpha d_k) = b_j$$

ALGORITMUS ŘEŠENÍ PROBLÉMU NELINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

Nejprve s omezením ve tvaru rovnosti.

Přímé metody

Problém nelineárního programování:

$$\min \{ f(x) : h(x) = 0 \}$$

Přímé metody řešení Lagrangeových rovnic $(L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T h(x))$

$$\nabla f(x) + \nabla h(x) \lambda = 0$$

$$h(x) = 0$$

Zvolíme si hodnotící funkci (měřítko funkce), podle které budeme oceňovat algoritmus výpočtu optima

$$m(x, \lambda) = \frac{1}{2} \|\nabla f(x) + \nabla h(x) \lambda\|^2 + \frac{1}{2} \|h(x)\|^2$$

První člen je kvadrát normy gradientu Lagrangeovy funkce podle proměnné x a druhý člen je penále za nesplnění omezení problému.

Bod minima hodnotící funkce $m(x, \lambda)$ je stejný jako bod, který splňuje Lagrangeovy rovnice a vyhovuje omezením

Hodnotící funkce někdy nazývá **absolutní penalizační funkce**.

Protože pro všechna $j \notin W$ platí $a_j^T x_k < b_j$, pak z předchozí rovnice plyne $\alpha a_j^T d_k > 0$, $j \notin W$. Odtud plyne

$$\alpha = \alpha_j = \frac{b_j - a_j^T x_k}{a_j^T d_k}$$

Výpočet α_j provedeme pro všechna $j \notin W$. Za skutečné $\alpha = \alpha_k$ vezmeme to nejmenší z α_j .

Učíme jsme přípustné α_k spolu s indexem j -tého omezení, na které jsme narazili a proto ho zahrneme do množiny pracovních omezení - $W_{k+1} = W_k \cup j$.

Proto připusnou hodnotu α_k vypočteme podle vztahu

$$\alpha_k = \min_{a_j^T d_k > 0} \left[1, \frac{b_j - a_j^T x_k}{a_j^T d_k} \right]$$

4. Určíme bod x_{k+1} a novou pracovní množinu W_{k+1} .

Je-li $\lambda_i \geq 0$ pro všechna $i \in E$ a $i \in I$, pak $x_{k+1} = x^*$ je optimální bod.

5. Je-li některé $\lambda_i < 0$, pak z množiny všech $\lambda_i < 0$, vybereme to nejmenší. Nechtě je to λ_p

$$p = \arg \min_{i, \lambda_i < 0} \lambda_i,$$

omezení p -tého vypustíme z pracovní množiny W_{k+1} .

To plyne z citlivostní věty - při minimalizaci je přírůstek kritéria $\Delta f = -\lambda_p \Delta b_p$.

Protože při změně omezení z rovnosti na nerovnost je přírůstek omezení $\Delta b_p < 0$, pak pro $\Delta f < 0$ musí být příslušný Lagrangeův koeficient $\lambda_p < 0$.

To je postup řešení problému kvadratické optimalizace s lineárními omezeními ve tvaru rovnosti i nerovnosti.

Věta:

Nechť body (x^*, λ^*) splňují nutné podmínky prvního řádu pro lokální minimum hodnotící funkce $m(x, \lambda)$ a bod optima (x^*, λ^*) je regulárním bodem (hodnoty Jacobovy matice $\nabla h(x^*)$ je rovna m) a Hessova matice $H(x^*, \lambda^*) = \nabla^2 f(x^*) + \nabla^2 h(x^*) \lambda^*$ Lagrangeovy funkce $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T h(x)$ je pozitivně definitní.

Pak (x^*, λ^*) je globální minimum hodnotící funkce $m(x, \lambda)$ a $m(x^*, \lambda^*) = 0$.

□

Dvě iterativní metody řešení nelineárního problému.

První metoda volí směr hledání gradient Lagrangeovy funkce, je to tedy metoda prvního řádu.

Druhá metoda je Newtonova metoda druhého řádu.

Metoda prvního řádu

Gradientní metoda prvního řádu.

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \alpha_k \nabla_x L(x_k, \lambda_k) \\ \lambda_{k+1} &= \lambda_k + \alpha_k h(x_k)\end{aligned}$$

Směr hledání proměnné x je ve směru záporného gradientu Lagrangeovy funkce vzhledem k proměnné x (je to proto, že hledáme minimum vzhledem k x).

Směr hledání Lagrangeových koeficientů je ve směru kladného gradientu Lagrangeovy funkce vzhledem k λ (je to proto, že hledáme maximum vzhledem k λ).

Ukážeme - směr hledání je směrem zajišťujícím klesání hodnotící funkce, což znamená, že je negativní skalární součin vektoru směru hledání s gradientem hodnotící funkce.

Směr hledání je vektor se složkami $-\nabla_x L(x_k, \lambda_k)$ a $h(x_k)$.

Gradient hodnotící funkce má složky

$$\begin{aligned}\nabla_x m(x, \lambda) &= \nabla_x^2 L(x, \lambda) \nabla_x L(x, \lambda) + \nabla_x h(x) h(x) \\ \nabla_\lambda m(x, \lambda) &= \nabla_x h(x)^T \nabla_x L(x, \lambda)\end{aligned}$$

Skalární součin gradientu hodnotící funkce a směru hledání je

$$-\nabla_x L(x, \lambda)^T \nabla_x^2 L(x, \lambda) \nabla_x L(x, \lambda) \leq 0.$$

Odtud ale pouze plyne, že zvolený směr hledání zaručuje klesání hodnotící funkce pokud $\nabla_x L(x, \lambda) \neq 0$.

To znamená, že volbou koeficientu α_k pomocí nějakého algoritmu jednorozměrné optimalizace hodnotící funkce ve zvoleném směru, iterační proces konverguje k bodu, ve kterém $\nabla_x L(x, \lambda) = 0$.

Newtonova metoda

Nalezení stacionárního bodu Lagrangeovy funkce - nepoužívanější je Newtonova metoda.

Budeme aplikovat Newtonovu metodu na řešení soustavy

$$\begin{aligned}\nabla_x L(x, \lambda) &= \nabla f(x) + \nabla h(x) \lambda = 0 \\ \nabla_\lambda L(x, \lambda) &= h(x) = 0\end{aligned}$$

Připomeňme:

Pro řešení rovnice $q(x) = 0$ je Newtonův iterační algoritmus

$$x_{k+1} = x_k - [q'(x_k)]^{-1} q(x_k).$$

Naši funkci z předchozí rovnice rozvineme v řadu v okolí x_k

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \nabla_x L(x_{k+1}, \lambda_{k+1}) \\ h(x_{k+1}) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \nabla_x L(x_k, \lambda_k) \\ h(x_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nabla_x^2 L(x_k, \lambda_k) \\ \nabla h(x_k)^T \end{bmatrix} \Delta x_k \\ &\quad + \begin{bmatrix} \nabla_x h(x_k) \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \lambda_k\end{aligned}$$

kde $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$ a $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta \lambda_k$.

Abý

$$\begin{bmatrix} \nabla_x L(x_{k+1}, \lambda_{k+1}) \\ h(x_{k+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Nemáme záruku, že v nalezeném bodě je $h(x) = 0$.

Proto je třeba provést modifikaci hodnotící funkce. Upravená hodnotící funkce

$$\bar{m}(x, \lambda) = m(x, \lambda) - \gamma \left[f(x) + \lambda^T h(x) \right]$$

Gradient modifikované hodnotící funkce je

$$\begin{aligned}\nabla_x \bar{m}(x, \lambda) &= \nabla_x^2 L(x, \lambda) \nabla_x L(x, \lambda) + \nabla_x h(x) h(x) - \gamma \nabla_x L(x, \lambda) \\ \nabla_\lambda \bar{m}(x, \lambda) &= \nabla_x h(x)^T \nabla_x L(x, \lambda) - \gamma h(x)\end{aligned}$$

Součin gradientu modifikované hodnotící funkce se směrem hledání

$$-\nabla_x L(x, \lambda)^T \left[\nabla_x^2 L(x, \lambda) - \gamma I \right] \nabla_x L(x, \lambda) - \gamma |h(x)|^2$$

Protože předpokládáme, že Hessova matice Lagrangeovy funkce je pozitivně definitní, pak existuje γ (dostatečně malé), že předchozí výraz je negativní pokud současně $\nabla_x L(x, \lambda) \neq 0$ a $h(x) \neq 0$.

Proto zvolený směr hledání zaručuje klesání modifikované hodnotící funkce. Pro určitou hodnotu koeficientu γ přímá iterační metoda konverguje k řešení nelineárního problému (s omezením rovnosti).

pak platí

$$\begin{bmatrix} \nabla_x^2 L(x_k, \lambda_k) & \nabla h(x_k) \\ \nabla h(x_k)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_k \\ \Delta \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla_x L(x_k, \lambda_k) \\ -h(x_k) \end{bmatrix}$$

K první rovnici v předchozí soustavě přidáme člen $(\nabla h(x_k) \lambda_k)$, pak je první rovnice

$$\nabla_x^2 L(x_k, \lambda_k) \Delta x_k + \nabla h(x_k) (\Delta \lambda_k + \lambda_k) = -\nabla_x L(x_k, \lambda_k) + \nabla h(x_k) \lambda_k$$

Výraz na pravé straně předchozí rovnice je roven $-\nabla f(x_k)$. Potom lze předchozí rovnici zapsat ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \nabla_x^2 L(x_k, \lambda_k) & \nabla h(x_k) \\ \nabla h(x_k)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_k \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f(x_k) \\ -h(x_k) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Předchozí soustava rovnic je podobná soustavě

$$\begin{aligned}Hx + A^T \lambda + c &= 0 \\ Ax + &- b = 0\end{aligned}$$

Bude mít tedy jednoznačné řešení, pokud matice $\nabla h(x^*)^T$ má plnou řádkovou hodnotu a matice $\nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*)$ je pozitivně definitní.

Postačující podmínky druhého řádu pro náš původní problém s omezením rovnosti jsou kromě toho,

že matice $\nabla h(x^*)^T$ má plnou řádkovou hodnotu (regulární bod omezení),

ještě navíc matice $\nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*)$ musí být pozitivně definitní na tečném podprostoru M k množině omezení,

kde $M = \{x : \nabla h(x^*)^T x = 0\}$.

Postačující podmínky jsou tedy trochu odlišné od předchozích podmínek pro jednoznačné řešení předchozí soustavy rovnic.

Abychom zajistili pozitivní definitnost Hessiany matice Lagrangeovy funkce na celém prostoru, pak je třeba opět provést modifikaci původního problému.

Místo $\min \{f(x) : h(x) = 0\}$ uvažujeme ekvivalentní problém

$$\min \left\{ f(x) + \frac{1}{2}c|h(x)|^2 : h(x) = 0 \right\}$$

přidáním penále $\frac{1}{2}c|h(x)|^2$.

Hessova matice tohoto problému je

$$H(x) = \nabla^2_x L(x, \lambda) + c \nabla h(x) \nabla h(x)^T$$

kde $L(x, \lambda)$ je Lagrangeova funkce původního problému. Pro dostatečně velkou penalizační konstantu c je tato nová Hessova matice pozitivně definitní na celém prostoru.

Newtonova metoda zaručuje řád konvergence alespoň dvě, pokud jsme dostatečně blízko řešení.

Abychom zaručili konvergenci ze vzdálených bodů - globální konvergenci - je třeba zaručit, aby proces hledání zajišťoval klesání hodnotící funkce. To zaručíme, když v Newtonově směru budeme provádět jednorozměrnou minimalizační volbu optimálního koeficientu α . Ono totiž platí, že směr generovaný Newtonovou metodou je směr, který zaručuje klesání hodnotící funkce.

Součin gradientu hodnotící funkce s Newtonovým směrem je

$$-|\nabla_x L(x_k, \lambda_k)|^2 - |h(x_k)|^2$$

Předchozí výraz je záporný pokud $\nabla_x L(x_k, \lambda_k) \neq 0$ nebo $h(x_k) \neq 0$.

Newtonova metoda zaručuje globální konvergenci, pokud je aplikována s proměnným krokem.

ROZŠÍŘENÍ NA NEROVNOSTNÍ OMEZENÍ

Newtonova metoda řeší soustavu rovnic - podobná soustavě rovnic při QP s lineárními omezeními ve tvaru rovnosti.

QP jsme rozšířili na řešení problémů se smíšenými omezeními ve tvaru rovnosti i nerovnosti (metoda aktivních množin).

Obdobně rozšíříme Newtonovy metody na řešení problémů s nerovnostními omezeními.

Uvažujeme optimalizační problém

$$\min \{f(x) : h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$$

Problém řešíme iterativně. Definujeme Lagrangeovu funkci

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^T h(x) + \mu^T g(x)$$

Mějme tedy příslušný bod x_k a vektory Lagrangeových koeficientů λ_k a μ_k . Iterativně řešíme kvadratický problém

$$\min \left\{ \nabla f(x_k)^T s_k + \frac{1}{2} s_k^T [\nabla^2 f(x_k) + \nabla^2 h(x_k) \lambda_k + \nabla^2 g(x_k) \mu_k] s_k \right\} \quad (2)$$

s omezeními

$$\nabla h(x_k)^T s_k + h(x_k) = 0$$

$$\nabla g(x_k)^T s_k + g(x_k) \leq 0 \quad (3)$$

kde $x_{k+1} = x_k + s_k$ a Lagrangeovy multiplikátory jsou Lagrangeovými multiplikátory problému kvadratického programování.

Sekvenční kvadratické programování se skládá ze tří základních kroků:

1. Aktualizace Hessovy matice Lagrangeovy funkce

Modifikované Newtonovy metody a kvazi-Newtonovy metody

Modifikace Newtonovy metody se provádí proto, abychom se vyhnuli přímému výpočtu Hessovy matice Lagrangeovy funkce $H_k = \nabla^2_x L(x_k, \lambda_k)$.

Hessovu matici můžeme aproximovat nějakou maticí Q_k , která může být buď konstantní během iterčního procesu, nebo může být aktualizovaná například metodou BFGS, pak

$$Q_{k+1} = Q_k + \frac{q_k q_k^T}{q_k^T d_k} - \frac{Q_k^T Q_k}{d_k^T Q_k d_k}$$

kde

$$d_k = x_{k+1} - x_k$$

$$q_k = \nabla_x L(x_{k+1}, \lambda_{k+1}) - \nabla_x L(x_k, \lambda_k)$$

Při tom λ_{k+1} získáme řešením (1). Abychom soustavu rovnic (1) nemuseli řešit celou, provádí se aproximace vektoru λ_{k+1} a řešíme pouze horní část soustavy (1), to je

$$\nabla_x^2 L(x_k, \lambda_k) \Delta x_k + \nabla h(x_k) \lambda_{k+1} = -\nabla f(x_k)$$

jejíž řešení je

$$x_{k+1} = x_k - [\nabla_x^2 L(x_k, \lambda_k)]^{-1} \nabla_x L(x_k, \lambda_k)^T$$

kde $\tilde{\lambda}_k$ je nějaký odhad aktualizace vektoru Lagrangeových koeficientů. Existuje celá řada možností, např.

$$\tilde{\lambda}_k = \lambda_k + c h(x_k).$$

Poslední člen vznikl z penalizačního členu $\frac{1}{2}c|h(x)|^2$, který se přidá k minimalizované funkci $f(x)$ a $c > 0$ je nějaká konstanta.

2. Použití kvadratického programování na řešení kvadratického problému s použitím metody aktivních množin

3. Jednorozměrné hledání a výpočet hodnotící funkce

Metoda vyžaduje start algoritmu z příslušného bodu. Pokud ho neznáme (nelze zvolit z reálné podstaty problému), pak příslušný bod získáme řešením následujícího problému

$$\min \{ \gamma : h(x) = 0, g(x) - \gamma e \leq 0 \}$$

kde $e = [1, 1, \dots, 1]^T$ je vektor s jednotkovými prvky.

Za počáteční příslušný bod x_0 zvolíme nějaký bod, splňující pouze omezení typu rovnosti.

Algoritmus sekvenčního kvadratického programování je syntézou řady metod. Algoritmus:

1. Nalezení příslušného počátečního bodu x_0 a počáteční pozitivně definované matice Q_0 .

2. Řešení kvadratického problému (2) s omezeními (3). Je-li $s_k = 0$, pak jsme získali řešení problému v bodě x_k .

3. Ve směru s_k provedeme jednorozměrnou minimalizaci, pak

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k$$

Parametr α_k je volen tak, aby zajistil dostatečný pokles hodnotící funkce. Hodnotící funkci volíme ve tvaru

$$m(x) = f(x) + \sum r_i h_i(x) + \sum r_j \max[0, g_j(x)]$$

Váhové koeficienty r_i, r_j se volí úměrně Lagrangeovým koeficientům λ_i, μ_j .

4. Provedeme aktualizaci matice Q_k podle metody BFGS. V literatuře jsou popsány i jiné možnosti aktualizace aproximace Hessovy matice.

Metoda sekvenčního kvadratického programování je spolehlivá a velmi efektivní numerická metoda.

Problém optimálního řízení dynamických systémů

Dosud - řešení problémů optimalizace statických systémů, které byly popsány soustavou rovnic a nerovnic. Čas se v těchto problémech nevyskytoval.

Problémy optimalizace dynamických systémů - systémů v nichž jsou proměnné závislé na čase. Optimalizace spojitých systémů. Pro řešení je třeba znát

- 1. Popis dynamického systému, modelujícího reálný objekt, který chceme optimalně řídit.
- 2. Z podstaty problému vyplývají omezení některých proměnných.
- 3. Problémem je výběr cíle, který chceme dosáhnout.

Cíl se obvykle formuluje kritériem optimality. Cílem je optimalizovat (minimalizovat či maximalizovat) toto kritérium.

Dynamický systém

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x, u, t) \\ y(t) &= \tilde{f}(x, u, t) \end{aligned}$$

$x(t)$ - stavový vektor systému,
 $u(t)$ - řídicí vektor - nezávisle proměnná,
 $y(t)$ - výstupní vektor.

Omezení veličin

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad x(t) \in X \subset R^n, \quad U, X \text{ - množiny přípustných hodnot řízení a stavu systému.}$$

11
VARIÁČNÍ METODY I.

Obvykle známe počáteční stav systému $x(t_0) = x_0$.

Problém - řídit systém tak, aby na konci intervalu řízení $[t_0, t_1]$ byl systém ve stavu $x(t_1) = x_1$.

Pokud je koncový stav dosažitelný, existuje více možností.

Pro optimální řešení volíme kritérium kvality řízení, které ohodnotí řešení úlohy - každému řešení přiřadí reálné číslo (často pouze nezáporné) a podle jeho velikosti můžeme porovnávat jednotlivá řešení a vybírat z nich to nejlepší.

Kritérium kvality řízení J je

$$J(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1), u(t)) = h(x(t_1), t) + \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), u(t), t) dt$$

První člen kritéria $h(x(t_1), t)$, závisí na stavu v koncovém čase t_1 . Hodnotí cíl trajektorie.

Druhý, integrální člen, hodnotí průběh trajektorie systému - způsob jakým je dosaženo cíle.

Definice problému optimálního řízení:

Problém optimálního řízení spočívá v určení takového řízení $u(t)$ systému na intervalu $t_0 \leq t \leq t_1$, aby byla splněna omezení a kritérium kvality řízení bylo minimální. Takové řízení je optimální řízení $u^*(t)$. □

Kritérium J přiřadí každé přípustné funkci $u(t)$ a $x(t)$ reálné číslo (hodnotu kritéria).

Kritérium je tedy funkcionál.

Problém optimálního řízení spojitého systému je tedy problémem nalezení extrémů funkcionálu při respektování omezení daných stavovou rovnicí systému a omezujícími podmínkami.

Různé modifikace:

Problém s pevným koncem trajektorie - koncový čas t_1 a koncový stav $x(t_1)$ je pevně zadán.

Problém s volným koncovým časem - není určen pouze koncový čas t_1

Problém s volným koncovým stavem - není určen pouze koncový stav $x(t_1)$. Případně koncový bod je prvkem nějaké dané cílové množiny.

Nejprve problémy bez omezení množiny přípustných stavů X a přípustných řízení U .

Určením optimálního řízení $u^*(t)$ vyřešíme problém optimálního ovládání - řízení systému v otevřené smyčce.

Optimální zpětnovazební řízení $u^* = u^*(x, t)$. Provedeme syntézu optimálního regulátoru.

Existence optimálního řízení - existuje alespoň jedno přípustné řízení, kterým stav $x(t_1)$ v čase t_1 dosáhneme.

Není-li řízení omezeno, předchozí požadavek splníme, leží-li koncový stav $x(t_1)$ v podprostoru dosažitelných stavů.

Pro omezené řízení ani dosažitelnost koncového stavu obecně nestačí pro řešitelnost problému.

Někdy hodnotíme v kritériu místo stavu $x(t)$ pouze výstup systému $y(t)$. Pak dosadíme výstupní rovnici za $y(t)$.

Jiné požadavky na řízení systému:

Je dána funkce $w(t)$ - nazývaná referenční signál. reference nebo požadovaná funkce - a naším požadavkem je, aby výstup systému co nejvíce sledoval tuto referenci.

Problém sledování (Tracking Problem):

Chceme tedy, aby odchylka trajektorie $e(t) = w(t) - y(t)$ byla v nějakém ohledu minimální. Přitom často nemáme žádné požadavky na koncový bod trajektorie - bod $x(t_1)$ je volný.

Problém regulátoru (Regulator Problem) Reference $w(t)$ je konstantní (nejčastěji nulová), koncový bod $x(t_1)$ je volný a koncový čas t_1 je pevný.

VARIAČNÍ METODY

Variální metody určují nutné a postačující podmínky, které musí splňovat extrém funkcionálu.

Základní variační úloha

Hledáme extrém funkcionálu

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

Funkce $g(\cdot)$ je **jádro funkcionálu**.

Pro danou reálnou funkci $x(t)$ má funkcionál určitou hodnotu.

Funkce $x(t)$ musí splňovat určité požadavky - obvykle to musí být funkce spojitá s derivacemi definovanými jednoznačně s výjimkou konečného počtu bodů.

Takové funkce jsou přípustné funkce a body, ve kterých nejsou derivace funkce jednoznačně definovány se nazývají úhlové body.

Funkce $x^*(t)$, která zajišťuje extrém funkcionálu, se nazývá **extremála**.

Hledáme nutné podmínky, které splňuje extremála.

Jsou obdobné nutným podmínkám pro extrém funkce - nulovost první derivace v bodě extrému.

Znaménko druhé variace funkcionálu

$$\frac{\partial^2 J(x^* + \varepsilon \delta x)}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0}$$

určuje druh extrému (zda je to minimum či maximum).

Nutné podmínky extrému funkcionálu $J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt$

$$J(x^* + \varepsilon \delta x) = \int_{t_0}^{t_1} g(x^*(t) + \varepsilon \delta x(t), \dot{x}^*(t) + \varepsilon \dot{\delta x}(t), t) dt, \quad \delta \dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \delta x(t)$$

Nutná podmínka extrému - nulovost první variace funkcionálu

$$\frac{\partial J(x^* + \varepsilon \delta x)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} g(x^*(t) + \varepsilon \delta x(t), \dot{x}^*(t) + \varepsilon \dot{\delta x}(t), t) dt = 0$$

Jádro funkcionálu rozvineme do řady

$$\frac{\partial J(x^* + \varepsilon \delta x)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} \left[g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) + \varepsilon \delta x(t) \frac{\partial g}{\partial x} + \varepsilon \dot{\delta x}(t) \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} + 0(\varepsilon) \right] dt$$

derivace funkce g podle svých proměnných bereme v bodě $x(t) = x^*(t)$ (pro $\varepsilon = 0$, $\delta x = 0$).

Po provedení derivace dostaneme

$$\delta J = \frac{\partial J(x^* + \varepsilon \delta x)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial g}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t) \right] dt = \int_{t_0}^{t_1} [g_x \delta x(t) + g_{\dot{x}} \delta \dot{x}(t)] dt$$

značení $g_x = \frac{\partial g}{\partial x}$, $g_{\dot{x}} = \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}$.

Nyní integrujeme po částech (per partes) předchozí výraz

Funkci $x(t)$ vnoříme do třídy funkcí

$$x(t) = x^*(t) + \varepsilon \delta x(t)$$

kde $x^*(t)$ je extremála, $\delta x(t)$ je variace funkce $x(t)$ (odchylka funkce od extremály) a ε je nějaké reálné číslo. Spočítáme hodnotu funkcionálu $J(x^*(t))$ a $J(x^*(t) + \varepsilon \delta x(t))$ a určíme přírůstek hodnoty funkcionálu

$$\Delta J(\varepsilon, x^*(t), \delta x(t)) = J(x^*(t) + \varepsilon \delta x(t)) - J(x^*(t))$$

Přírůstek funkcionálu ΔJ je nezáporný pro libovolné ε a $\delta x(t)$

Má-li přírůstek funkcionálu konečné derivace podle ε v okolí $\varepsilon = 0$, rozvineme přírůstek funkcionálu do řady

$$\Delta J = \frac{\partial J(x^* + \varepsilon \delta x)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(x^* + \varepsilon \delta x)}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon^2 + \dots$$

První člen rozvoje se nazývá první variace funkcionálu, kterou značíme δJ .

První variace funkcionálu je obdobná první derivaci funkce.

Obdobně je druhý člen rozvoje nazýván druhou variací funkcionálu

$$\Delta J = \varepsilon \delta J + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \delta^2 J + \dots$$

Aby v $x^*(t)$ nastal extrém funkcionálu, je nutná podmínka nulovosti první variace funkcionálu pro $x(t) = x^*(t)$

$$\frac{\partial J(x^* + \varepsilon \delta x)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \text{pro libovolné } \delta x$$

Poznámka: Integrace per partes

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du, \quad \int_a^b uv dt = [uv]_a^b - \int_a^b u \dot{v} dt$$

kde $u = u(t)$ a $v = v(t)$

Integrace per partes druhého členu v δJ

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t) dt = [g_{\dot{x}} \delta x(t)]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} g_{\dot{x}\dot{x}} \delta x(t) dt$$

Odtud variace funkcionálu

$$\delta J = [g_{\dot{x}} \delta x(t)]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(g_x - \frac{d}{dt} g_{\dot{x}} \right) \delta x(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(g_x - \frac{d}{dt} g_{\dot{x}} \right) \delta x(t) dt$$

Uvažujeme nejprve pevné krajní body a proto $\delta x(t_0) = \delta x(t_1) = 0$.

Nutná podmínka pro extrém je nulovost první variace funkcionálu ($\delta J = 0$).

Pomocná věta: Je-li nějaká funkce $G(t)$ spojitá na intervalu (t_0, t_1) a je-li

$$\int_{t_0}^{t_1} G(t) \delta x dt = 0,$$

pak pro libovolnou funkci $\delta x(t)$, splňující okrajové podmínky $\delta x(t_0) = \delta x(t_1) = 0$, musí být funkce $G(t) = 0$ na intervalu $t_0 \leq t \leq t_1$.

Odtud plyne nutná podmínka - extrémála musí vyhovovat Eulerově - Lagrangeově rovnici

$$g_x - \frac{d}{dt}g_x = 0$$
$$\text{Eulerova - Lagrangeova rovnice je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu}$$
$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \frac{dx}{dt} = 0$$

neboli (úsporný zápis)

$$g_x - g_{tx} - g_{xt} - \frac{dx}{dt}g_{xx} = 0$$

Jádro funkcionálu - funkce $g(x, \dot{x}, t)$ - musí být funkce spojitá spolu se svými parciálními derivacemi do druhého řádu pro $t_0 \leq t \leq t_1$.

Extrémála $x^*(t)$ je funkce spojitá, má spojitě první a druhé derivace až na konečný počet bodů - tzv. **úhlové body**.

Eulerova - Lagrangeova rovnice je nelineární diferenciální rovnice druhého řádu.

Jejím řešením dostaneme dvouparametrickou soustavu funkcí $x(t, \alpha, \beta)$ v mž parametry α a β určíme z okrajových podmínek, $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$.

Izoperimetrická úloha.

Izoperimetrická úloha je úlohou na minimalizaci funkcionálu za omezující podmínky

$$\int_{t_0}^{t_1} f(x, \dot{x}, t) dt = K.$$

Omezující podmínka v izoperimetrické úloze je integrálním omezením.

Řešení - vytvoříme rozšířený funkcionál

$$\bar{J} = \int_{t_0}^{t_1} g(x, \dot{x}, t) dt + \lambda \int_{t_0}^{t_1} \bar{g}(x, \dot{x}, t) dt$$

kde $\lambda = \text{konst.}$ je Lagrangeův koeficient (obdoba řešení úlohy na vázaný extrém)

Pro tento funkcionál vyřešíme Eulerovy - Lagrangeovy rovnice a získáme extrémály $x^*(t, \alpha, \beta, \lambda)$.

Integrační konstanty určíme z okrajových podmínek a Lagrangeův koeficient λ určíme z izoperimetrické podmínky.

Princip reciprocity. Soustava extrémál je táž, budeme-li hledat extrém funkcionálu J při izoperimetrické podmínce, nebo hledáme extrém funkcionálu v izoperimetrické podmínce, za předpokladu, že funkcionál J má konstantní hodnotu.

Příklad 1: Zobecněná kvadratická regulační plocha

Nalezneme extrémály, které minimalizují funkcionál ve tvaru zobecněné kvadratické regulační plochy

$$J = \int_0^\infty (x^2(t) + T^2 \dot{x}^2(t)) dt$$

Okrajové podmínky jsou $x(0) = x_0, x(\infty) = 0$.

Z Eulerových - Lagrangeových rovnic plyne

$$g_x - \frac{d}{dt}g_{\dot{x}} = 2x(t) - 2T^2 \ddot{x}(t) = 0$$

Řešení předchozí rovnice je

$$x(t) = \alpha e^{-\frac{t}{T}} + \beta e^{+\frac{t}{T}}$$

Z okrajových podmínek dostaneme řešení - extrémála je funkce

$$x^*(t) = x_0 e^{-\frac{t}{T}}$$

Extrémála je exponenciála s časovou konstantou T .

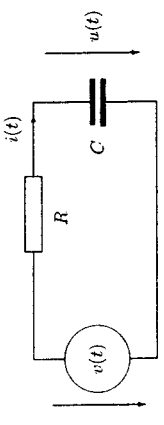
Pro $T = 0$ neexistuje spojitá funkce splňující okrajové podmínky.

Při zpětnovazebním optimálním řízení hledáme takové konstanty regulátoru, aby se regulační odchylka při odezvě na skok řídicí veličiny či poruchy co nejvíce blížila extrémále (exponenciále).

Volbou časové konstanty T v kritériu volíme vlastní dobu přechodového děje a tím můžeme zmenšit či odstranit překývnutí reálného regulačního obvodu.

Příklad 2: Nabíjení kondenzátoru

Mějme sériový elektrický obvod tvořený zdrojem napětí $v(t)$, rezistorem R a kondenzátorem C - viz obr.



Obrázek 15: Elektrický RC obvod - nabíjení kondenzátoru.

Hledáme průběh impulsu napětí $u(t)$ na kondenzátoru C , aby průměrná hodnota napětí na kondenzátoru C byla maximální na intervalu $0 \leq t \leq T$. Kritérium je tedy

$$J = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

Hodnoty napětí $u(t)$ na konci a počátku nabíjení jsou dané $u(0) = 0, u(T) = U$. Při nabíjení kondenzátoru C přes rezistor R ze zdroje $v(t)$ jsme omezení energií, kterou můžeme přeměnit na odporu R na teplo. Odtud plyne omezení

$$\int_0^T Ri^2(t) dt = K$$

kde $i(t)$ je proud tekoucí sériovým obvodem.

Mezi proudem $i(t)$ a napětím $u(t)$ na kondenzátoru C platí $i(t) = C \frac{du}{dt}$.

Zavedeme rozšířený funkcional

$$J = \int_0^T \left(\frac{1}{T} u(t) + \lambda R i^2(t) \right) dt = \int_0^T \left(\frac{1}{T} u(t) + \lambda R C^2 \dot{u}^2(t) \right) dt$$

Eulerova - Lagrangeova rovnice

$$\frac{1}{T} - 2\lambda R C^2 \ddot{u}(t) = 0.$$

Řešením je kvadratická funkce $u(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2$.

Integrační konstanty α, β, γ určíme z okrajových podmínek a izoperimetrické podmínky.

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{T} U + \frac{1}{T} \sqrt{\frac{3KT}{RC^2}} - 3U^2, \quad \gamma = -\frac{1}{T^2} \sqrt{\frac{3KT}{RC^2}} - 3U^2$$

Úloha má reálné řešení pouze tehdy, je-li výraz pod odmocninou kladný

$$K \geq \frac{U^2 RC^2}{T}$$

Pokud není předchozí nerovnost splněna, nelze současně splnit izoperimetrickou podmínku a okrajové podmínky.

Volné koncové body

Často nejsou dány počáteční (t_0, x_0) , nebo koncové body (t_1, x_1) .

Hledáme podmínky, které musí platit ve volném koncovém bodu - podmínky transverzality.

Podmínky transverzality odvodíme z přírůstku funkcionalu. Úvahu provedeme pro volný koncový bod. Pro volný počáteční bod je postup úplně obdobný.

Aby bod (t_1, x_1) byl optimální koncový bod, musí být nulová lineární část přírůstku funkcionalu při změně koncového času $t_1 \in \delta t_1$ a změně koncového stavu $x_1 \in \delta x_1$.

Přírůstek funkcionalu je

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1} [g(x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}, t) - g(x, \dot{x}, t)] dt + \int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} g(x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}, t) dt$$

První integrál upravíme rozvojem jádra v řadu

$$\int_{t_0}^{t_1} [\cdot] dt = \int_{t_0}^{t_1} (g_x \delta x + g_{\dot{x}} \delta \dot{x}) dt$$

Integraci druhého členu per partes

$$[g_x \delta x]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(g_x - \frac{d}{dt} g_{\dot{x}} \right) \delta x dt$$

Extremála splňuje Eulerovu - Lagrangeovu rovnici - integrál v předchozím vztahu je roven nule.

Druhý integrál v přírůstku funkcionalu je při zanedbání členů řádu $(\delta t_1)^2$ a vyšších

$$\int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} g(x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}, t) dt = g(x, \dot{x}, t)|_{t=t_1} \delta t_1.$$

Předchozí omezení plyne z následující úvahy:

Pokud máme kondenzátor dodat nějaký náboj $Q = UC$, kde $Q = \int_0^T i(t) dt$, pak výraz $\int_0^T R i^2(t) dt$ je nejmenší, bude-li proud $i(t) = \text{konst.}$

To prokážeme snadno řešením následující pomocné úlohy

$$\min \int_0^T R i^2(t) dt, \quad \text{za podmínky} \quad \int_0^T i(t) dt = Q = UC = \text{konst.}$$

Rozšířený funkcional pro tento problém

$$\bar{J} = \int_0^T (R i^2(t) + \lambda i(t)) dt$$

vede na Eulerovu - Lagrangeovu rovnici $2Ri(t) + \lambda = 0$.

Jejím řešením je zřejmě $i(t) = \frac{UC}{T} = \text{konst.}$

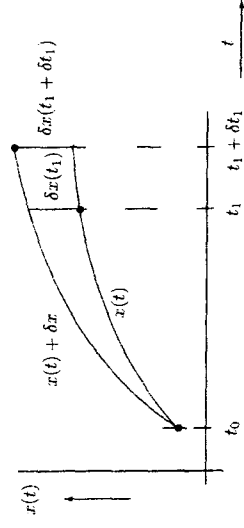
Energie přeměněná na odporu na teplo je nejmenší, bude-li proud $i(t)$ konstantní (chceme-li dodat kondenzátoru C náboj Q).

Proto izoperimetrická konstanta K v naší původní úloze musí být větší než

$$K \geq \int_0^T R i^2(t) dt = \int_0^T R \left(\frac{UC}{T} \right)^2 dt = \frac{RU^2 C^2}{T^2} \int_0^T dt = \frac{U^2 RC^2}{T}.$$

Uvažujeme pouze členy prvního řádu - přírůstek funkcionalu je pak roven první variaci funkcionalu

$$\Delta J = \delta J = [g_x \delta x]_{t=t_1} + g(x, \dot{x}, t)|_{t=t_1} \delta t_1.$$



Obrázek 16: Volný koncový bod - variace v koncovém bodě.

Přitom variaci v koncovém bodě můžeme podle obr. vyjádřit pomocí totální variace ve tvaru

$$\delta x(t_1) = \delta x(t_1 + \delta t_1) - \dot{x}(t_1) \delta t_1, \quad \implies \quad g_x \delta x(t_1) = g_x \delta x(t_1 + \delta t_1) - g_{\dot{x}} \delta t_1$$

Totální variaci v koncovém bodě označíme $\delta x = \delta x(t_1 + \delta t_1)$.

Obecná podmínka transverzality ve volném koncovém bodu

$$\delta J = 0 = [g - \dot{x} g_{\dot{x}}] \delta t|_{t=t_1} + [g_x \delta x]_{t=t_1}$$

Úplně obdobné podmínky platí pro volný počáteční bod trajektorie.

počáteční čas t_0 i koncový čas t_1 s podmínkou, že jejich rozdíl je konstantní $t_1 - t_0 = \alpha$. Variace δt_0 a δt_1 jsou tedy podmínkou

$$\delta t_1 - (\delta t_0 + \delta \alpha) = 0$$

$\delta t_1 = \delta t$. Podmínky transverzality jsou pak

$$f_2|_{t=t_1} - [g - x g_x]|_{t=t_0} = 0$$

sme vyřešili úlohu o optimálním nabíjení kondenzátoru C tak, aby střední hodnota napětí na kondenzátoru při omezení tepelných ztrát na nabíjecím rezistoru R .

Je dán počáteční napětí $u(0)$ a koncové napětí $u(T) = U$ a také koncový a počáteční čas - viz příklad 2. Úlohou je najít trajektorii, která splňuje tyto podmínky a minimizuje ztráty.

Úloha je řešena pomocí metody variací. Úloha je řešena pomocí metody variací.

$$g(u, \dot{u}, t, \lambda) = \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \lambda R C^2 u^2 \right)$$

Podmínky transverzality jsou

$$f_2(T) = 0$$

Paraboly a z podmínek transverzality plyne, že derivace napětí v koncovém čase je nulová $u'(T) = 0$.

Úloha počáteční podmínky $u(0) = 0$, izoperimetrickou podmínku i podmínku transverzality je $u^*(t) = \alpha + \beta t$.

$$\beta = -\frac{1}{C} \sqrt{\frac{3K}{RT}}, \quad \gamma = \frac{1}{2CT} \sqrt{\frac{3K}{RT}}.$$

Úloha je vždy řešena.

Úloha

Svazek křivek vycházejících z daného počátečního bodu $x(t_0)$. Tato soustava křivek tvoří pole.

V intervalu $t_0 \leq t \leq t_1$ se extrémály v nějakém jiném bodě neprotínají, aby tvořily tzv. centrální pole.

Extremály v nějakém jiném bodě než je střed svazku (to je bod $x(t_0)$), takový bod nazýváme konjugovaný střed. Centrální pole je střed svazku.

Konjugované body soustavy křivek $x(t, c)$, kde c je parametr soustavy, tvoří obálku soustavy křivek, jejíž rovnice

$$y(t, c) = 0$$

je rovnice paraboly $x(t, c) = (t - c)^2$ je rovnice svazku $\frac{\partial x(t, c)}{\partial c} = 2(t - c) = 0$.

Po dosazení do rovnice svazku dostaneme množinu konjugovaných bodů, která je v tomto případě rovna

$$x = ct \text{ má jediný konjugovaný bod a tím bodem je střed svazku } t = 0, x = 0.$$

□

Odvodíme podmínku, aby extrémly tvořily centrální pole.

Extremály vyhovují Eulerové - Lagrangeově rovnici $g_x - \frac{d}{dt}g_z = 0$. Tuto rovnici budeme derivovat podle nějakého parametru c

$$\frac{d}{dc}g_x - \frac{d}{dc}\frac{d}{dt}g_z = 0$$

Odtud

$$\frac{\partial g_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial g_x}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial c} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g_z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial g_z}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial c} \right) = 0$$

Po dosazení $\frac{\partial g_x}{\partial c} = u$ a úpravě

$$\left(g_{xx} - \frac{d}{dt}g_{x\dot{x}} \right) u - \frac{d}{dt}g_{x\dot{x}}\dot{u} + g_{x\dot{x}}\dot{u} = 0$$

Konečný tvar Jacobiho diferenciální rovnice

$$g_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{u} + \left[\frac{d}{dt}g_{x\dot{x}} - g_{x\dot{x}} \right] \dot{u} + \left[\frac{d}{dt}g_{x\dot{x}} - g_{x\dot{x}} \right] u = 0$$

Je to diferenciální rovnice druhého řádu pro funkci $u(t) = \frac{\partial x}{\partial c}$.

Jacobiho podmínka je splněna, pokud $u(t) \neq 0$ kromě počátečního bodu v čase t_0 .

Jacobiho podmínka je nutnou podmínkou extrémů funkcionálu. Vyhovuje-li pole extrémů Jacobiho podmínce, potom jsou-li dány počáteční a koncové body trajektorie, existuje pouze jediná extrémála, která splňuje obě okrajové podmínky.

kde Weierstrassova funkce E je

$$E = g(x, z, t) - g(x, s, t) - (z - s) \frac{\partial g(x, s, t)}{\partial s}$$

kde s je derivace $\dot{x}(t)$ na extrémále a

z je libovolná jiná derivace funkce $x(t)$.

Postažující podmínkou, aby funkcionál J nabýval na extrémále minima, je nezápornost Weierstrassovy funkce E

$$E \geq 0$$

Pro slabé minimum stačí, aby nerovnost $E \geq 0$ byla splněna pro $x, z = \dot{x}$ blízké k extrémále C .

V tomto případě můžeme funkci $g(x, \dot{x}, t)$ rozvinout do řady

$$g(x, z, t) = g(x, s, t) + \frac{\partial g(x, s, t)}{\partial s} (z - s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(x, q, t)}{\partial s^2} (z - s)^2,$$

kde q leží mezi z a s . Weierstrassova funkce má potom tvar

$$E(x, z, s, t) = \frac{1}{2} g_{\dot{x}\dot{x}}(x, q, t) (z - s)^2,$$

Weierstrassovu podmínku můžeme potom nahradit zesílenou Legendrovou podmínkou $g_{\dot{x}\dot{x}}(x, \dot{x}, t) > 0$.

Pro silné minimum musí být nerovnost $E \geq 0$ splněna pro x, t blízké k bodům extrémály C , ale pro libovolné hodnoty $z = \dot{x}(t)$.

Příklad 5: Je splněna Jacobiho podmínka v úloze na minimum kvadratické regulační plochy - viz příklad 1.?

Funkcionál, jehož minimum hledáme je

$$J = \int_0^\infty (x^2 + (T\dot{x})^2) dt, \quad x(0) = x_0, \quad x(\infty) = 0$$

Jacobiho rovnice je

$$2T^2\ddot{u}(t) + 0\dot{u}(t) - 2u(t) = 0$$

Její řešení je

$$u(t) = c_1 e^{\frac{t}{T}} + c_2 e^{-\frac{t}{T}}$$

Z podmínky $u(1) = 0$ plyne $c_1 = -c_2 = c$. Kromě středu svazku v bodě $u(0)$ je Jacobiho podmínka $u(t) \neq 0$ splněna. Pole extrémál tvoří centrální pole se středem svazku v bodě $x(0) = x_0$.

Weierstrassova podmínka

Hledáme známého přírůsku funkcionálu při přechodu od extrémály (křivky, kterou označíme C) k nějaké jiné, blízké křivce (označíme ji C_1)

$$\Delta J = \int_{C_1} g(x, \dot{x}, t) dt - \int_C g(x, \dot{x}, t) dt$$

Tento přírůstek funkcionálu můžeme po úpravě vyjádřit ve tvaru

$$\Delta J = \int_C E(x, z, t) dt$$

Příklad 6: Provéďte, zda je splněna Legendrova i Weierstrassova podmínka při minimalizaci obecné kvadratické plochy podle příkladu 1.

Zesílená Legendrova podmínka je

$$\frac{\partial^2 g(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}^2} = 2T^2 > 0$$

pro $T \neq 0$, což vyhovuje předpokladu. Weierstrassova funkce je pro daný problém

$$E(x, z, s, t) = x^2 + T^2 z^2 - x^2 - T^2 s^2 - (z - s) 2T^2 s = T^2 (z - s)^2$$

Z předchozího plyne, že Legendrova i Weierstrassova podmínka jsou splněny pro libovolné $\dot{x}(t) = z$.

Extremála, která je řešením Eulerovy - Lagrangeovy rovnice tvoří silně relativní minimum.

Úhlové body

Extremály, které získáme řešením Eulerovy - Lagrangeovy rovnice jsou spojité křivky, které mají spojitě derivace. Extremála se může skládat z úseků, z nichž každý je řešením Eulerovy rovnice. V místě styku dvou extremál může dojít k tomu, že derivace není v bodě styku jednoznačně určena (derivace zprava a zleva jsou navzájem různé). Takovou bodu říkáme **úhlový bod**. V úhlovém bodě má derivace extremály nespojitost prvního druhu. Budeme hledat podmínky, které musí být splněny, aby extremála měla úhlový bod. Předpokládáme, že v bodě $t \approx t_a$ má extremála úhlový bod. Funkcionál J můžeme vyjádřit ve tvaru

$$J = \int_{t_0}^{t_a} g(x, \dot{x}, t) dt + \int_{t_a}^{t_1} g(x, \dot{x}, t) dt$$

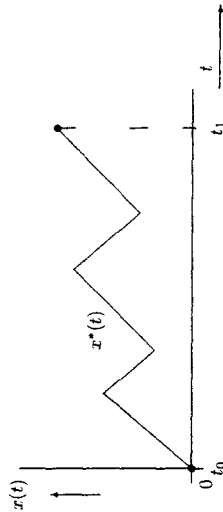
Je-li úhlových bodů více, rozdělíme funkcionál na více dílčích částí. Mezi úhlovými body extremály vyhovují Eulerově - Lagrangeově rovnici. Předpokládáme, že t_a a $x(t_a)$ jsou volné a můžeme je uvažovat jako proměnné koncové a počáteční podmínky integrálů v předchozím vztahu.

Musí platit podmínky transverzality v bodě $t \approx t_a$, z nichž plyne

$$(y - \dot{x}g_{\dot{x}})_{t=t_a-0}^{t=t_a+0} + g_{\dot{x}}\delta x|_{t=t_a+0} = 0$$

Jelikož variace δt a $\delta x(t_a)$ jsou nezávislé, plynou z předchozí rovnice dvě podmínky

$$(y - \dot{x}g_{\dot{x}})_{t=t_a-0} = (y - \dot{x}g_{\dot{x}})_{t=t_a+0}$$
$$g_{\dot{x}}|_{t=t_a-0} = g_{\dot{x}}|_{t=t_a+0}$$



Obrázek 17: Extremály z příkladu 7 jsou lomené křivky.

Předchozí podmínky jsou Weierstrassovy - Erdmannovy podmínky.

Příklad 7: Ověřte, zda existují úhlové body extremál, které minimalizují funkcionál

$$\int_0^{t_1} (\dot{x}^4 - 6\dot{x}^2) dt, \quad x(0) = 0, \quad x(t_1) = x_1$$

Snadno se přesvědčíme, že extremály jsou přímky.

Weierstrassovy - Erdmannovy podmínky jsou

$$\dot{x}^4 - 6\dot{x}^2 - \dot{x} (4\dot{x}^3 - 12\dot{x})|_{t=t_a-0} = \dot{x}^4 - 6\dot{x}^2 - \dot{x} (4\dot{x}^3 - 12\dot{x})|_{t=t_a+0}$$
$$4\dot{x}^3 - 12\dot{x}|_{t=t_a-0} = 4\dot{x}^3 - 12\dot{x}|_{t=t_a+0}$$

Označíme-li $\dot{x}|_{t=t_a-0} = u, \dot{x}|_{t=t_a+0} = v$ jsou předchozí podmínky

$$3u^2(2 - u^2) = 3v^2(2 - v^2)$$
$$4u(u^2 - 3) = 4v(v^2 - 3)$$

První rovnice bude splněna, pokud $|u| = |v|$, z druhé rovnice kromě toho plyne $u = \pm\sqrt{3}, v = \pm\sqrt{3}$.

Úhlové body extremály mohou být libovolné. Extremály jsou tedy lomené křivky se směnami $\pm\sqrt{3}$ - viz obr. .

ROZŠÍŘENÍ ZÁKLADNÍ ÚLOHY

Extrémy funkcionálu v n-rozměrném prostoru

Hledejme extrém funkcionálu

$$J = \int_{t_0}^{t_1} g(x, \dot{x}, t) dt$$

kde $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$ je vektorová funkce.

Protože jednotlivé složky vektoru x jsou nezávislé, platí nutná podmínka extrému funkcionálu ve tvaru Eulerovy - Lagrangeovy rovnice pro každou složku

$$g_{x_i} - \frac{d}{dt}g_{\dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

kterou můžeme zapsat $g_x - \frac{d}{dt}g_{\dot{x}} \approx 0$, kde x je vektor rozměru n .

E-L rovnice je soustava n obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu.

Integrační konstanty, kterých je $2n$ určíme z n počátečních a n koncových podmínek $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$.

Legendrova podmínka vyžaduje pozitivní semidefinitnost matice druhých partiálních derivací

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Pro volný koncový bod platí podmínky transversality

$$\left(g - \sum_{i=1}^n g_{x_i} \dot{x}_i \right) \delta t + \sum_{i=1}^n g_{x_i} \delta x_i = 0, \quad \text{pro } t = t_1.$$

Extremála může mít úhlové body. Podmínky, které musí být splněny v úhlovém bodě jsou

$$\begin{aligned} \delta g_{x_i} \Big|_{t=t_0-0} &= \delta g_{x_i} \Big|_{t=t_0+0}, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ g - \sum_{i=1}^n g_{x_i} \dot{x}_i \Big|_{t=t_0-0} &= g - \sum_{i=1}^n g_{x_i} \dot{x}_i \Big|_{t=t_0+0} \end{aligned}$$

Je-li funkcional závislý na vyšších derivacích

$$J = \int_{t_0}^{t_1} g(x, \dot{x}, \dots, x^{(m)}, t) dt$$

je nutnou podmínkou extrémů funkcionalu tzv. Euler - Poissonova rovnice

$$g_x - \frac{d}{dt} g_{\dot{x}} + \dots + (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} g_{x^{(m)}} = 0.$$

Předchozí rovnice je vektorová diferenciální rovnice řádu $2m$.

Integrační konstanty určíme z m počátečních a m koncových vektorových podmínek.

Poznámka: Omezení nerovnicí

$$f(x, \dot{x}, t) \leq 0$$

můžeme převést na omezení typu rovnosti zavedením další složky $x_{n+1}(t)$ vektoru x . Ekvivalentní omezení

$$f(x, \dot{x}, t) + x_{n+1}^2 = 0.$$

Podobně omezení ve tvaru oboustranné nerovnosti

$$\alpha \leq f(x, \dot{x}, t) \leq \beta, \quad \alpha < \beta$$

převědeme na omezení rovnosti ve tvaru

$$(f - \alpha)(\beta - f) - x_{n+1}^2 = 0,$$

opět zavedením další složky vektoru x .

Příklad 8: Mějme opět problém nabíjení kondenzátoru - viz příklad 2. Nyní hledáme maximum střední hodnoty napětí na kondenzátoru, ale *při omezení energie* E_N nabíjecího zdroje $v(t)$

$$E_N = \int_0^T i(t)v(t) dt = \int_0^T C \dot{u}(t)v(t) dt$$

Napětí $u(t)$ na kondenzátoru C a napětí zdroje $v(t)$ jsou vázány diferenciální rovnicí

$$v(t) = R i(t) + u(t), \quad i(t) = C \dot{u}(t)$$

Počáteční podmínka je $u(0) = 0$ a hodnota napětí $u(t)$ v koncovém čase $t_1 = T$ není určena.

Variální problémy s omezením

Jednu variální metodu s omezením jsme již řešili - izoperimetrická úloha s omezením ve tvaru integrálu.

Tu jsme řešili zavedením konstantního Lagrangeova koeficientu a rozšířeného funkcionalu.

Často je omezující podmínka určena algebraickou či diferenciální rovnicí.

Lagrangeova úloha: Hledáme extrém funkcionalu při omezení ve tvaru diferenciální rovnice

$$f_j(x, \dot{x}, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Tento problém řešíme zavedením Lagrangeova vektoru $\lambda(t) = [\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t)]$. Extrémally Lagrangeovy úlohy jsou extrémami funkcionalu

$$\bar{J} = \int_{t_0}^{t_1} [g(x, \dot{x}, t) + \lambda^T(t) f(x, \dot{x}, t)] dt$$

kde $f = [f_1, \dots, f_m]^T$ je vektor omezení.

Lagrangeovu úlohu řešíme tak, že pro předchozí funkcional napíšeme Eulerovy - Lagrangeovy rovnice a jejich řešením dostaneme extrémally původní úlohy. Podrobně později.

Problémem je tedy maximalizovat funkcional $J = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$ při izoperimetrické podmínce $E_N = \int_0^T C \dot{u}(t)v(t) dt$ a vazební podmínce $v(t) = RC \dot{u}(t) + u(t)$.

Sestavíme rozšířený funkcional

$$\bar{J} = \int_0^T \left[\frac{1}{T} u(t) + \lambda_1 C \dot{u}(t)v(t) + \lambda_2 (v(t) - u(t) - RC \dot{u}(t)) \right] dt$$

kde $\lambda_1 = \text{konst.}$ je Lagrangeův koeficient a $\lambda_2(t)$ je Lagrangeova funkce.

Předchozí funkcional je závislý na $(u(t), v(t), \lambda_2(t))$ a proto napíšeme Eulerovu - Lagrangeovu rovnici pro každou proměnnou zvlášť:

$$\text{E-L rce pro } u(t) : \frac{1}{T} - \lambda_2(t) + RC \dot{\lambda}_2(t) - \lambda_1 C v(t) = 0$$

$$\text{E-L rce pro } v(t) : \lambda_1 C \dot{u}(t) + \lambda_2(t) = 0$$

$$\text{E-L rce pro } \lambda_2(t) : v(t) - u(t) - RC \dot{u}(t) = 0$$

Řešením této soustavy tří diferenciálních rovnic prvního řádu získáme extrémally $u^*(t), v^*(t), \lambda_2^*(t)$ (ověřte, že $u^*(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2$).

Integrační konstanty určíme z počáteční podmínky $u(0) = 0$, izoperimetrické podmínky $E_N = \dots$ a podmínky transversality, která je zde tvaru

$$\bar{g}_u = \lambda_1 C v(T) - \lambda_2(T) RC = 0$$

kde $\bar{g}$ je jádro rozšířeného funkcionalu.

12

VARIAČNÍ METODY II.

ŘEŠENÍ REGULAČNÍCH PROBLÉMŮ VARIAČNÍMI METODAMI

Lagrangeova, Mayerova a Bolzova úloha

Tři základní typy variačních úloh.

Lagrangeova úloha - minimalizace funkcionálu

$$J_1(x(t)) = \int_{t_0}^{t_1} g(x, \dot{x}, t) \, dt$$

s omezením ve tvaru

$$f(x, \dot{x}, t) = 0$$

Lagrangeovu úlohu řešíme zavedením rozšířeného funkcionálu

$$\bar{J} = \int_{t_0}^{t_1} \left[g(x, \dot{x}, t) + \lambda^T(t) f(x, \dot{x}, t) \right] dt$$

Mayerova úloha - minimalizace funkcionálu

$$J_2(x(t)) = [h(x, t)]_{t_0}^{t_1} = h(x(t_1), t_1) - h(x(t_0), t_0)$$

s omezením

$$f(x, \dot{x}, t) = 0$$

Bolzova úloha - kombinace obou předchozích úloh - minimalizace funkcionálu

$$J_3(x(t)) = [h(x, t)]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} g(x, \dot{x}, t) \, dt$$

s omezením

$$f(x, \dot{x}, t) = 0$$

V Lagrangeově úloze mohou být oba koncové body pevné.

Jsou-li volné, potom pro jejich určení použijeme podmínky transversality.

V Mayerově úloze je vždy alespoň jeden koncový bod volný. Jeho určením minimalizujeme funkcionál.

Bolzova úloha vyžaduje opět volné koncové body.

Jsou-li koncové body pevné, je konstantní neintegrální člen v kritériu a proto jej při minimalizaci nemusíme uvažovat.

Bolzova úloha přechází potom v úlohu Lagrangeovu.

Mezi těmito typy úloh existuje těsná souvislost.

Převod Mayerovy úlohy na Lagrangeovu

Je-li funkce $h(x, t)$ v kritériu diferencovatelná, pak funkcionál upravíme

$$J_2(x(t)) = h(x(t_1), t_1) - h(x(t_0), t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dh(x, t)}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} \right) dt$$

Mayerova úloha přechází na úlohu Lagrangeovu.

Řešení problému optimálního řízení dynamických systémů

Problém optimálního řízení - variační problém Bolzova typu.

Pokud jsou omezení na stav či řízení, je tento problém obecně řešitelný klasickými variačními metodami.

Optimální řízení bez omezení

Dovolená množina řízení a stavů není omezená, pak $U \equiv R^r$, $X \equiv R^n$. Kritérium kvality řízení

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} g(x, u, t) dt$$

s omezením daným pouze stavovou rovnicí spojitého systému

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Určení optimálního řízení $u(t)$ minimalizující kritérium a respektující diferenciální omezení je variační problém Lagrangeova typu.

Zavedeme rozšířený funkcional

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [g(x, u, t) + \lambda^T (x - f(x, u, t))] dt$$

Jádro funkcionalu označíme ϕ

$$\phi(x, u, \lambda, t) = g(x, u, t) + \lambda^T (x - f(x, u, t)).$$

Integrovaním soustav diferenciálních rovnic konjugovaného systému a diferenciálních rovnic systému, spolu se soustavou r algebraických rovnic získáme optimální funkce $x^*(t)$, $u^*(t)$, $\lambda^*(t)$.

Integrační konstanty, kterých je $2n$ vypočítáme z n počátečních podmínek $x(t_0)$ a n koncových podmínek $x(t_1)$.

Jsou-li volné koncové body, použijeme pro určení integračních konstant podmínek transverzality. Ty jsou pro volný konec $(x(t_1), t_1)$ rovny

$$\left(\phi - \sum_{i=1}^n \phi_{x_i} \dot{x}_i \right) \delta t + \sum_{i=1}^n \phi_{x_i} \delta x_i = 0, \quad \text{pro } t = t_1.$$

Po dosazení za ϕ dostaneme

$$\left(g - \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right) \delta t + \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta x_i = 0, \quad \text{pro } t = t_1.$$

Je-li $t_0, t_1, x(t_0)$ pevné a pouze $x(t_1)$ je volné, pak

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \delta x_i = 0, \quad \text{pro } t = t_1.$$

Jelikož variace δx_i je ve volném koncovém bodě libovolná, pak z předchozího

$$\lambda_i(t_1) = 0.$$

Je-li koncový bod $x(t_1)$ volný, pak je nulová koncová podmínka konjugovaného systému.

Extremály $u^*(t)$, $x^*(t)$, $\lambda^*(t)$ splňují Eulerovy - Lagrangeovy rovnice

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \phi}{\partial \dot{u}} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\lambda}} = 0$$

První rovnice v předchozí soustavě je soustava n diferenciálních rovnic prvního řádu.

Druhý člen v druhé rovnici je nulový, neboť jádro ϕ neobsahuje explicitně $\dot{u}(t)$ a proto tato rovnice není diferenciální rovnicí.

Je to je soustava r algebraických rovnic, ze kterých určíme optimální řízení $u^*(x^*, \lambda^*, t)$.

Také ve třetí rovnici je druhý člen nulový, neboť jádro ϕ neobsahuje explicitně $\dot{\lambda}(t)$.

Třetí rovnice je soustava n diferenciálních rovnic, tožných se stavovými rovnicemi systému.

Po rozepsání do složek dostaneme soustavu diferenciálních a algebraických rovnic

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \dot{\lambda}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{\partial g}{\partial u_k} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r$$

$$\dot{x}_i - f_i(x, u, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

První rovnice je soustava diferenciálních rovnic pro složky vektoru $\lambda(t)$ a nazývá se rovnice konjugovaného systému.

Je-li konec trajektorie určen křivkou $\varphi(x) = 0$, pak přípustná variace δx je možná jen ve směru kolmém ke gradientu funkce $\varphi(x)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x = 0$$

Podmínky transverzality pro volný konec jsou $\lambda^T \delta x \Big|_{t=t_1} = 0$.

Odtud porovnáním

$$\lambda(t_1) = \alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^T,$$

Vektor $\lambda(t_1)$ v koncovém čase má stejný směr jako gradient omezení.

Uvědomme si, že diferenciální rovnice systému a konjugovaného systému spolu s algebraickou rovnicí pro optimální řízení nám neumožňují řešit problém optimálního řízení v reálném čase (on line).

Pro stavovou rovnici systému známe počáteční podmínku, ale pro konjugovaný systém počáteční podmínku $\lambda(t_0)$ neznáme.

Pro jednoznačnost trajektorie známe až koncovou podmínku systému $x(t_1)$, nebo, je-li konec volný, známe koncovou podmínku $\lambda(t_1)$ konjugovaného systému.

Problém optimálního řízení je převeden na řešení okrajového problému soustavy diferenciálních rovnic.

Analytické řešení je proveditelné pouze pro speciální problémy (jako na příklad problém optimálního řízení lineárního systému s kvadratickým kritériem optimality, který je známý pod zkratkou LQ řízení).

Chceme-li řešit problém optimálního řízení, nezbyvá nám než počáteční podmínku $\lambda(t_0)$ konjugovaného systému zvolit a řešit diferenciální rovnice systému a konjugovaného systému spolu s algebraickou rovnicí až do koncového času $t = t_1$. Pokud $x(t_1)$ není rovno koncové podmínce x_1 , pak musíme celé řešení znovu opakovat s vhodně upravenou počáteční podmínkou $\lambda(t_0)$ konjugovaného systému.

Tento postup musíme opakovat tak dlouho, až $x(t_1) = x_1$. Konvergence tohoto postupu není zaručena a téměř vždy je velmi pomalá.

Mějme nyní obecný problém optimálního řízení Bolzova typu

$$J(x(t), u(t)) = h(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} g(x, u, t) dt$$

Tento problém převedeme na problém Lagrangeova typu.

Při respektování omezení daném stavovou rovnicí systému dostaneme rozšířený funkcional

$$\tilde{J}(x(t), u(t)) = \int_{t_0}^{t_1} \left[g(x, u, t) + \lambda^T(x - f(x, u, t)) + \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} x \right] dt$$

Eulerovy - Lagrangeovy rovnice zůstanou stejné

Pro volný konec trajektorie $x(t_1)$ platí podmínky transversality $\phi_x = 0$ pro $t = t_1$, kde ϕ je jádro rozšířeného funkcionalu.

Pak

$$\lambda(t_1) = - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^T \Big|_{t=t_1}$$

Pro $\nu = 0$ neexistují spojitě extrémly. Pro $\nu \neq 0$ kritérium můžeme upravit do tvaru

$$J = \int_0^\infty (u(t)i(t) + \alpha\omega^2(t)) dt = \int_0^\infty (u^2(t) - u(t)\omega(t) + \alpha\omega^2(t)) dt$$

Je to variační problém Lagrangeova typu. Sestavíme rozšířený funkcional

$$\tilde{J} = \int_0^\infty (u^2(t) - u(t)\omega(t) + \alpha\omega^2(t) + \lambda(t)(\dot{\omega}(t) - u(t) + \omega(t))) dt$$

Eulerovy - Lagrangeovy rovnice jsou

$$\begin{aligned} -u(t) + 2\alpha\omega(t) + \lambda(t) - \dot{\lambda}(t) &= 0 \\ 2u(t) - \omega(t) - \lambda(t) &= 0 \\ \dot{\omega}(t) - u(t) + \omega(t) &= 0 \end{aligned}$$

Z druhé, algebraické rovnice, plyne řízení

$$u^*(t) = \frac{1}{2}(\omega(t) + \lambda(t))$$

Pro dosazení optimálního řízení do zbylých rovnic

$$\begin{aligned} \dot{\omega}(t) &= \frac{1}{2}(\dot{\lambda}(t) - \omega(t)) \\ \dot{\lambda}(t) &= \omega(t) \left(2\alpha - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}\lambda(t) \end{aligned}$$

Vlastní čísla matice této soustavy jsou $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha}$.

Řešení je

$$\omega(t) = c_1\Delta_1(\mu_1)e^{-\sqrt{\alpha}t} + c_2\Delta_1(\mu_2)e^{\sqrt{\alpha}t}$$

Příklad 9: Optimální dobůh stejnosměrného motoru.

Stejnoseměrný motor s konstantním buzením, řízený napětím na kotvě, je při zanedbání nelinearit a reakce kotvy popsán soustavou rovnic

$$\begin{aligned} U &= RI + k_1 n \\ k_2 I &= J \frac{dn}{dt} \end{aligned}$$

kde $U(\tau)$, $I(\tau)$, R je napětí, proud a odpor vinutí kotvy, J je moment setrvačnosti a n jsou otáčky hřídele motoru a k_1 , k_2 jsou konstanty motoru.

Zavedeme poměrné hodnoty

$$u(t) = \frac{U}{U_0}, \quad i(t) = \frac{I}{I_0}, \quad t = \frac{\tau}{T}$$

kde veličiny označené indexem nula jsou jmenovité hodnoty a T je elektromechanická časová konstanta.

Rovnice motoru v bezrozměrném tvaru

$$\begin{aligned} u(t) &= i(t) + \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) &= i(t) = u(t) - \omega(t) \end{aligned}$$

Hledáme optimální řízení $u^*(t)$, které zabrzdí motor - převede předchozí systém ze stavu $\omega(0) = \omega_0$ do stavu $\omega(\infty) = 0$.

Kritérium optimality zvolíme

$$J = \nu \int_0^\infty u(t)i(t) dt + \mu \int_0^\infty \omega^2(t) dt$$

První člen kritéria je úměrný energii dodané ze zdroje a druhý člen je úměrný kvadratické ploše odchylky.

$$\lambda(t) = c_1\Delta_2(\mu_1)e^{-\sqrt{\alpha}t} + c_2\Delta_2(\mu_2)e^{\sqrt{\alpha}t}$$

kde c_1 , c_2 jsou integrační konstanty a $\Delta_i(\mu_i)$ je subdeterminant i -tého sloupce libovolného řádku matice $(A - \mu_i I)$ (jsou to vlastně složky vlastního vektoru odpovídajícímu příslušnému vlastnímu číslu).

Pro druhou řádku vypočítáme subdeterminanty a dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta_1(\mu_1) = \Delta_1(\sqrt{\alpha}) &= -\frac{1}{2} \\ \Delta_2(\mu_1) = \Delta_2(\sqrt{\alpha}) &= -\frac{1}{2} + \sqrt{\alpha} \end{aligned}$$

S ohledem na koncovou podmínku je $c_2 = 0$, potom

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \omega_0 e^{-\sqrt{\alpha}t} \\ \lambda(t) &= \lambda_0 e^{-\sqrt{\alpha}t} \end{aligned}$$

Protože $c_1\Delta_1(\mu_1) = \omega_0$, $c_1\Delta_2(\mu_1) = \lambda_0$, pak platí $\lambda_0 = \omega_0(1 - 2\sqrt{\alpha})$. Optimální řešení

$$\begin{aligned} \omega^*(t) &= \omega_0 e^{-\sqrt{\alpha}t} \\ \lambda^*(t) &= \omega_0(1 - 2\sqrt{\alpha})e^{-\sqrt{\alpha}t} \\ u^*(t) &= (1 - \sqrt{\alpha})\omega^*(t) \end{aligned}$$

Optimální řízení je úměrné úhlové rychlosti.

Dobůh se děje s časovou konstantou $\tau = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

Pro $\alpha = 1$ je $u^*(t) = 0$, časová konstanta doběhu je rovna jedné. Brzdíme účinně tak, že obvod kotvy zkratujeme.

Pro $\alpha > 1$ je časová konstanta menší než jedna. Napětí zdroje $u(t)$ je záporné, proud je také záporný. Energie se ze zdroje napětí spotřebovává.

Pro $\alpha < 1$ je časová konstanta optimálního doběhu větší než jedna. Napětí zdroje $u(t)$ je kladné, ale proud je záporný. Energii v tomto případě rekuperujeme.

Pro $\alpha = 0$ je proud $i^*(t) = 0$, potom nebrzdíme a energeticky optimální doběh neexistuje.

Dosadíme-li optimální hodnoty veličin do kritéria kvality řízení, dostaneme

$$J = \int_0^\infty u(t)i(t) dt + \alpha \int_0^\infty \omega^2(t) dt = \frac{\omega_0^2}{2} (\sqrt{\alpha} - 1) + \alpha \left(\frac{\omega_0^2}{2\sqrt{\alpha}} \right), \quad \alpha \neq 0$$

Z předchozího vztahu je názorné patmo, jak se změnou α mění jednotlivé členy v kombinovaném kritériu kvality řízení.

KVADRATICKY OPTIMÁLNÍ ŘÍZENÍ LINEÁRNÍHO SYSTÉMU (LQ ŘÍZENÍ)

Pro lineární systém $\dot{x} = Ax + Bu$ budeme hledat optimální řízení minimalizující kvadratické kritérium

$$J = \frac{1}{2} x(t_1) S x(t_1) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} x^T Q x + u^T R u dt$$

Rozšířený funkcional

$$\tilde{J} = \frac{1}{2} x(t_1) S x(t_1) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} x^T Q x + u^T R u + \lambda^T (\dot{x} - Ax - Bu) dt$$

Řešení optimalizačního problému s omezením

Často je omezena oblast změn řídicích nebo stavových veličin.

Na hranici oblastí omezení existují pouze jednostranné variace směřující dovnitř dovolené oblasti.

Variační problém je tzv. neklasického typu. Variační problémy s omezením se snáze řeší principem maxima.

Ukážeme, jak lze omezení ve tvaru jednoduchých nerovnic převést vhodnou transformací na problémy bez omezení.

Jsou-li řídicí veličiny omezeny

$$g_i(x(t), u(t)) \leq 1, \quad i = 1, \dots, p$$

pak tento systém nerovností lze nahradit systémem rovnic

$$s_i(x(t), u(t), v(t)) - g_i(x(t), u(t)) = 0, \quad i = 1, \dots, p,$$

kde funkce $s_i(x(t), u(t), v(t))$ mají modul menší než jedna a jsou dvakrát diferencovatelné v omezené oblasti argumentů.

Za funkce s_i volíme funkce trigonometrické.

$$s_i(t) = [\sin v_1, \sin v_2, \dots, \sin v_p]$$

Tímto způsobem můžeme omezení ve tvaru jednostranné i oboustranné nerovnosti nahradit rovností.

E-L rovnice

$$\dot{x} - Ax - Bu = 0$$

$$u^T R - \lambda^T B = 0$$

$$x^T Q + \lambda^T A - \dot{\lambda}^T = 0$$

Z druhé rovnice plyne optimální řízení

$$u^*(t) = R^{-1} B^T \lambda(t)$$

Uděláme předpoklad, že stav konjugovaného systému je úměrný stavu systému

$$\lambda(t) = -P(t)x(t)$$

kde $P(t)$ je zatím neznámá matice. Tu určíme dosazením do rovnice konjugovaného systému

$$\dot{\lambda} = -P\dot{x} - \dot{P}x = -P(Ax + B(R^{-1}B^T Px)) - \dot{P}x = Qx - A^T Px$$

Odtud plyne Riccatova rovnice pro matici $P(t)$

$$\dot{P} = -Q + A^T P - PA - PR^{-1}B^T P$$

Z okrajové podmínky konjugovaného systému určené podmínkami transverzality

$$\lambda(t_1) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Sx(t_1), \quad \Rightarrow \quad P(t_1) = S$$

Optimální řízení vede na stavovou zpětnou vazbu

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T P(t)x(t)$$

kde matice stavové zpětné vazby je určena řešením Riccatovy rovnice.

Je-li řízení omezeno nerovnostmi

$$|u_i(t)| \leq 1, \quad i = 1, \dots, r$$

pak toto omezení nahradíme rovností

$$\sin v_i(t) - u_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, r$$

kde $v_i(t)$ je nová proměnná, na kterou se nekládou žádná omezení.

Jiné omezení ve tvaru oboustranné nerovnosti

$$\alpha(x, u) \leq g(x, u) \leq \beta(x, u)$$

nahradíme rovností

$$(\beta - \alpha) \sin v + (\beta - \alpha) - 2g(x, u) = 0$$

Nelineární transformace zobrazují ohraničenou oblast variací řídicí funkce $u(t)$ na mnohaliistou neohraničenou oblast změn jiné řídicí funkce $v(t)$.

Příklad 10: Časově optimální doběh stejnosměrného motoru.

Diferenciální rovnice motoru je stejná jako v předchozím příkladě 9.

Kritérium optimality je doba regulačního pochodu

$$J = \int_0^T dt = T$$

Bez omezení řízení roste řídicí veličina nade všechny meze.

Řídicí veličina je omezena $|u(t)| \leq 1$.

Toto omezení nahradíme rovností $\sin v(t) - u(t) = 0$.

Kanonický tvar Eulerovy - Lagrangeovy rovnice

Základní variální problém minimalizace funkcionálu

$$J = \int_{t_0}^{t_1} g(x, \dot{x}, t) \, dt$$

Zavedeme skalární funkci - Hamiltonovu funkci nebo **Hamiltonián**

$$H(x, \dot{x}, t) = -g(x, \dot{x}, t) + \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} g(x, \dot{x}, t)\right) \dot{x}$$

a vektorovou funkci (**konjugovaný vektor**)

$$p(x, \dot{x}, t) = \left(\frac{\partial g(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}}\right)^T$$

Z předchozí rovnice lze vyjádřit $\dot{x}$ jako funkci p a proto $H = H(x, p, t)$.

Totální diferenciál hamiltoniánu H je

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial t} dt + \frac{\partial H}{\partial p} dp$$

Z $H(x, \dot{x}, t) = -g(x, \dot{x}, t) + p^T \dot{x}$ současně také platí

$$dH = -dg + \dot{x}^T dp + p^T d\dot{x} = -\frac{\partial g}{\partial x} dx - \frac{\partial g}{\partial t} dt + \dot{x}^T dp$$

Odtud porovnáním

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -gx, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -gt, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x}^T$$

Obecné podmínky transversality $\delta J = 0 = [(g - \dot{x}g_x) \delta t]_{t=t_1} + [g_j \delta x]_{t=t_1}$ ve volném koncovém bodě mají v tomto případě tvar

$$-H(x, p, t)\delta t + p^T \delta x = 0, \quad \text{pro } t = t_1$$

Je-li $t_0, t_1, x(t_0)$ pevné a pouze $x(t_1)$ je volné, je podmínka transversality zřejmě

$$p(t_1) = 0.$$

Kanonický tvar Eulerových - Lagrangeových rovnic opět převádí variální problém na okrajový problém řešení diferenciálních rovnic.

Weierstrassova podmínka $E \geq 0$ je v kanonickém tvaru

$$E(x, z, s, t) = H(x, s, t) - H(x, z, t) \geq 0$$

kde $s(t)$ je derivace $\dot{x}(t)$ na extrémě a $z(t)$ je libovolná jiná derivace funkce $x(t)$.

Z předchozí rovnice plyne, že na extrémě nabývá Hamiltonova funkce svého maxima - viz kapitola o principu maxima.

Ověřte, že Weierstrassovy - Erdmannovy podmínky vyžadují spojitost funkce p a H v úhlovém bodě.

Jedná se o Lagrangeův problém. Upravený funkcionál

$$\tilde{J} = \int_0^T (1 + \lambda_1(t)(\sin v(t) - u(t)) + \lambda_2(t)(\dot{\omega}(t) - u(t) + \omega(t))) \, dt$$

Eulerovy - Lagrangeovy rovnice pro proměnné $\omega, u, v, \lambda_1, \lambda_2$ jsou

$$\omega : \lambda_2(t) - \dot{\lambda}_2(t) = 0$$

$$u : \lambda_1(t) - \lambda_2(t) = 0$$

$$v : \lambda_1(t) \cos v(t) = 0$$

$$\lambda_1 : \sin v(t) - u(t) = 0$$

$$\lambda_2 : \dot{\omega}(t) - u(t) + \omega(t) = 0$$

Řešením prvních tří rovnic dostaneme $\lambda_1(t) = -\lambda_2(t) = \lambda_0 e^{-t}$, $\lambda_1(t) \sqrt{1 - \sin^2 v(t)} = \lambda_1(t) \sqrt{1 - u^2(t)} = 0$.

Protože $\lambda_1(t)$ je nenulová a nemění znaménko, je optimální řízení $u^*(t) = +1$ nebo -1 po celou dobu přechodového děje.

Znaménko optimálního řízení je určeno znaménkem počáteční podmínky. Pro $\omega_0 > 0$ je $u(t) = -1$.

Pokud je systém, jádro funkcionálu i omezující podmínka lineární vzhledem k řízení $u(t)$, pak optimální řízení leží na hranici oblasti omezení.

Z předchozích rovnic plynou Eulerovy - Lagrangeovy rovnice $g_x - \frac{d}{dt} g_x = 0$ ve tvaru

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^T$$
$$\frac{dp}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T$$

Předchozí rovnice se nazývají **Hamiltonovou** nebo **kanonickou formou** Eulerovy - Lagrangeovy rovnice.

Soustavu Eulerových - Lagrangeových diferenciálních rovnic druhého řádu nahrazujeme soustavou dvou vektorových rovnic prvního řádu.

Poznámka: Předchozí rovnice se obvykle v literatuře udávají bez transpozice.

□

Podél extrémů platí

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

a jestliže jádro funkcionálu g a tím ani H nezávisí explicitně na čase t , pak $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ a hamiltonián je podél extrémů konstantní.

Platí

$$dJ = -H \, dt + p^T \, dx$$

Odtud

$$H = -\frac{\partial J}{\partial t}, \quad p^T = \frac{\partial J}{\partial x}$$

PROBLÉM OPTIMÁLNÍHO ŘÍZENÍ

$$\min \left\{ J = \int_{t_0}^{t_1} g(x, u, t) dt : \dot{x} = f(x, u, t); x(t_0) = x_0 \right\}.$$

Hamiltonova funkce je $H(x, \dot{x}, t) = -g(x, \dot{x}, t) + \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} g(x, \dot{x}, t) \right) \dot{x}$, kde za jádro y dosadíme jádro ϕ rozšířeného funkcionálu. Připomeňme, že toto jádro je

$$\phi(x, u, \lambda, t) = g(x, u, t) + \lambda^T (\dot{x} - f(x, u, t)).$$

Hamiltonova funkce je

$$H = - \left(g + \lambda^T (\dot{x} - f) \right) + \left(\frac{\partial (g + \lambda^T (\dot{x} - f))}{\partial \dot{x}} \right) \dot{x}.$$

Odtud po úpravách

$$H(x, \dot{x}, u, \lambda, t) = -g(x, u, t) + \lambda^T(t) f(x, u, t)$$

kde $\lambda(t)$ je konjugovaný vektor totožný s Lagrangeovým vektorem.

Hamiltonovy rovnice pro problém optimálního řízení mají tvar

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u}$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)^T$$

Předchozí soustava je totožná se soustavou variálních rovnic

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \dot{\lambda}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{\partial g}{\partial u_k} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, r$$

$$\dot{x}_i - f_i(x, u, t) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Pro optimalizační problém Bolzova typu s hodnocením dosaženého cílového bodu pomocí funkce $h(x(t_1))$ v kritériu, mají Hamiltonovy rovnice stejný tvar jako předchozí soustava.

DYNAMICKÉ PROGRAMOVÁNÍ

Dynamické programování (DP) je velmi účinný nástroj k numerickému řešení problémů optimalizace. Používá se při řešení nejrůznějších problémů od problémů optimalizace k problémům umělé inteligence. Mezi metodami optimalizace má metoda dynamického programování zvláštní místo. Tato metoda je velmi přitažlivá díky jednoduchosti jejího základního principu - **principu optimality**. Princip optimality i celá metoda dynamického programování jsou spojené s pracemi amerického matematika R. Bellmana. Princip optimality představuje vlastně princip postupné analýzy problému. Vedle principu optimality je v metodě dynamického programování velmi důležitá myšlenka vnoření konkrétního optimalizačního problému do třídy analogických problémů. Tento princip se nazývá **princip invariantního vnoření**. Výsledkem jsou rekurentní vztahy, které původní problém rozdělí na posloupnost řešení jednodušších problémů. Tyto rekurentní vztahy lze snadno řešit na počítači. Jedná totiž při aplikaci dynamického programování na řešení optimalizačních problémů je to, že s růstem počtu stavů procesu prudce roste požadavky na operační paměť počítače. Tento jev označil R. Bellman jako **"prokletí rozměrnosti"** (curse of dimensionality). V aplikacích metody dynamického programování je tomuto jevu věnována značná pozornost. Použitím metody dynamického programování nalezneme globální optimum a všechna optimální řešení.

13 DYNAMICKÉ PROGRAMOVÁNÍ

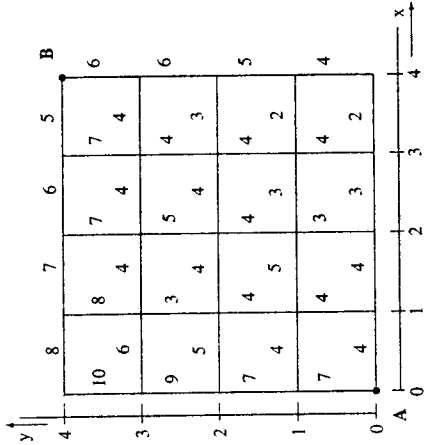
Princip metody dynamického programování

Princip optimality a princip invariantního vnoření

Problém optimalizace jako problém rozhodovací DP převede na mnohastupňový rozhodovací problém. Jediné rozhodnutí se převede na posloupnost rozhodování a jediné řešení převede na posloupnost řešení jednodušších úloh. Mnohastupňový rozhodovací proces je například proces diskrétního řízení systému. Jeho jednotlivé rozhodovací stupně jsou určeny volbou řízení v diskrétních časech. V jiných případech musíme "mnohastupňovost" zavést do optimalizačního problému uměle. **Princip optimality** tvrdí, že optimální posloupnost rozhodování v mnohastupňovém rozhodovacím procesu má tu vlastnost, že ať jsou jakékoliv vnitřní stavy procesu a předchozí rozhodování, zbylá rozhodování musí tvořit optimální posloupnost vycházející ze stavu, který je výsledkem předchozích rozhodování. V každém rozhodovacím stupni musíme volit optimální rozhodnutí, přičemž vycházíme ze stavu, ve kterém se právě nacházíme. Princip optimality je v podstatě jinou formulací známého přísloví "Neplač nad rozlitym mlékem". Stav, ve kterém právě jsme, je výsledkem předchozích rozhodování a tento stav již nemůžeme ovlivnit, ale naše další rozhodování musí být optimální. **Princip invariantního vnoření** znamená to, že náš jediný optimalizační problém vnoříme do celé třídy analogických problémů. Tuto celou třídu problémů vyřešíme a tím také jaksi mimoděk vyřešíme náš jediný problém. Je zajímavé, že tento zdánlivě složitý postup je mnohdy velice efektivní.

Řešení jednoduché úlohy metodou DP

Základní principy DP si nejpřístupněji vysvětlíme na jednoduché úloze určení optimální cesty ve městě z jednoho místa na druhé. Jednoduchým modelem této úlohy je úloha na optimální průchod ve čtvercové síti z bodu A do bodu B.



Obrázek 18: Optimální průchod sítí

Cesta z bodu A do B je možná pouze po úsečkách (ulice ve městě, hrany grafu na obr.). Překonání každé úsečky ohodnotíme kritériem či penálem. Může to být čas nebo spotřeba paliva potřebného k překonání části trajektorie, či supeň znečištění příslušné ulice a podobně.

Naším úkolem je nalézt takovou trajektorii z bodu A do B , aby součet dílčích kritérií po projitých úsečkách byl minimální. Uzlům sítě přiřadíme souřadnice (x, y) podle obr.

V úloze jsou souřadnice omezeny $0 \leq x \leq 4$ a $0 \leq y \leq 4$. Budeme dále předpokládat, že při pohybu sítě souřadnice uzlů neklesají. Pak v každém uzlu sítě se rozhodujeme, zda půjdeme nahoru či vpravo - graf na obr. je tedy orientovaný graf.

Takovou úlohu můžeme řešit tak, že prozkoumáme všechny možné cesty z A do B a vybereme tu nejlepší. Počet všech cest ve čtvercové síti o maximální souřadnici n je při zvolených omezeních roven $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$. V našem případě pro $n = 4$ máme 70 cest, ale pro $n = 20$ je celkový počet cest již $2 \cdot 10^{12}$.

Při rozsáhlejší síti tuto metodu přímého výběru (optimalizace hrubou silou) již nelze použít.

Metoda dynamického programování.

Problém nalezení optimální trajektorie z bodu A do B vníráme do třídy úloh hledání optimální trajektorie z libovolného bodu o souřadnicích (x, y) do cíle v bodě B .

Tím jsme si zdánlivě náš původní problém podstatně zkomplikovali. Dále uvidíme, že tato komplikace je opravdu pouze zdánlivá.

Hodnotu kritéria mezi body (x, y) a $(x + 1, y)$, to je ve směru růstu souřadnice x si označíme jako $g_x(x, y)$.

Podobně $g_y(x, y)$ je hodnota kritéria mezi body (x, y) a $(x, y + 1)$, to je ve směru růstu souřadnice y .

Rekurentní vztah (Bellmanova rovnice) pro optimální funkci $V(x, y)$ (Bellmanova funkce)

$$V(x, y) = \min \begin{bmatrix} g_x(x, y) + V(x + 1, y) \\ g_y(x, y) + V(x, y + 1) \end{bmatrix}, \quad 0 \leq x \leq n, \quad 0 \leq y \leq n.$$

Rekurentní vztah řešíme "od zadu", z koncové podmínky $V(4, 4) = 0$.

Optimální hodnota kritéria z bodu A do B je rovna $V(0, 0) = 32$.

Výšeší jsme zároveň i problém citlivosti optimální trajektorie na změnu rozhodnutí. Odchýlíme-li se z nějakého důvodu od optimální trajektorie, víme jak dále pokračovat optimálním způsobem.

Složitost předchozího algoritmu.

Při rekurentním výpočtu optimální funkce $V(x, y)$ provádíme rozhodování (minimalizaci) pouze ve vnitřních bodech sítě.

Těch je n^2 , jsou to body o souřadnicích $0 \leq x \leq n - 1, 0 \leq y \leq n - 1$. V každém rozhodovacím bodě pouze dvě sčítání.

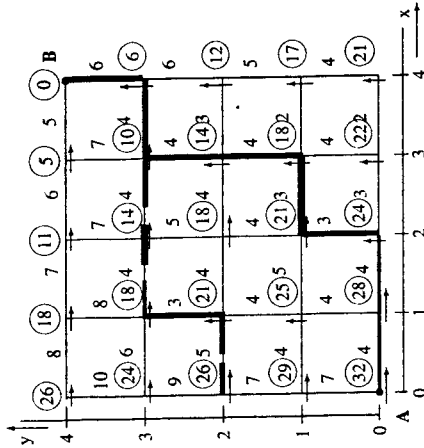
V krajních bodech sítě - to je v bodech o souřadnicích $x = n$, nebo $y = n$ - provádíme pouze jedno sčítání.

Celkový počet sčítání S_{DP} při použití metody dynamického programování je

$$S_{DP}(n) = 2n^2 + 2n$$

Při přímém výběru je celkový počet cest $(2n)!/(n!)^2$ a na každé cestě je nutno provést $2n$ sčítání. Celkový počet sčítání S_{PV} je při přímém výběru

$$S_{PV}(n) = 2n \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$



Obrázek 19: Optimální funkce a optimální rozhodování

Zavedeme si **optimální funkci** $V(x, y)$, která je rovna optimální hodnotě kritéria při přechodu po optimální trajektorii z bodu (x, y) do cíle B .

Optimální funkce $V(x, y)$ se také nazývá **Bellmanova funkce**.

Pro náš případ $n = 4$ je $S_{DP}(4) = 40$ a $S_{PV}(4) = 560$, ale pro $n = 10$ je $S_{DP}(10) = 220$, ale $S_{PV}(10) = 272000$.

Výpočetní složitost při použití metody dynamického programování roste kvadraticky, zatímco při přímém výběru roste exponenciálně.

Výpočet můžeme provádět tak, že si pamatujeme pouze optimální funkci $V(x, y)$ pro všechny body sítě a z ní určíme optimální rozhodování.

Z bodu (x, y) se pohybujeme vodorovně, platí-li

$$V(x, y) = a_x(x, y) + V(x + 1, y)$$

$$V(x, y) \leq a_y(x, y) + V(x, y + 1)$$

Pro pohyb vzhůru se znaménka prohodí.

Platí-li rovnost, můžeme se z bodu (x, y) pohybovat vpravo nebo vzhůru.

Pomocí DP nalezneme absolutní minimum a všechna optimální řešení.

Přímou Bellmanovu rovnici dostaneme, když naši úlohu o výběru optimální trajektorie z bodu A do bodu B vníráme do třídy úloh optimalizace trajektorie z bodu A do libovolného bodu o souřadnicích (x, y) .

Optimální funkci v této úloze označíme $U(x, y)$. Pro ni platí rekurentní vztah

$$U(x, y) = \min \begin{bmatrix} g_x(x - 1, y) + U(x - 1, y) \\ g_y(x, y - 1) + U(x, y - 1) \end{bmatrix}, \quad 0 \leq x \leq n, \quad 0 \leq y \leq n.$$

s okrajovou podmínkou $U(0, 0) = 0$.

Zřejmě platí $U(n, n) = V(0, 0)$.

OPTIMÁLNÍ ŘÍZENÍ DISKRÉTNÍCH SYSTÉMŮ

Diskrétní úloha optimalizace

Stavové rovnice diskrétního dynamického systému

$$\begin{aligned}x(k+1) &= f(x(k), u(k), k) \\ y(k) &= \tilde{f}(x(k), u(k), k)\end{aligned}$$

kde x, u, y je stav, vstup a výstup systému a $k = \{ \dots, 0, 1, \dots \}$ je diskrétní čas.

Řízení $u(k)$ i stav $x(k)$ jsou často omezeny

$$u(k) \in U \subset R^r, \quad x(k) \in X \subset R^n$$

kde U a X jsou množiny přípustných řízení a stavů (obecně závislé na diskrétním čase k).

Diskrétní čas $k \in [k_0, k_1]$, k_0 počáteční, k_1 koncový čas.

Kritérium kvality řízení

$$J(k_0, k_1, x(k_0), u(k_1), \dots, u(k_1 - 1)) = h(x(k_1), u(k_1), k) + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} g(x(k), u(k), k)$$

První člen hodnotí dosažený cíl trajektorie a druhý - sumační - člen hodnotí průběh trajektorie - způsob dosažení cíle.

Problém optimálního řízení - nalezení takového řízení $u^*(k)$ na intervalu $k \in [k_0, k_1 - 1]$, aby byla splněna omezení a kritérium bylo minimální.

Převod Bolzova problému na problém Lagrangeova typu:

Zavedeme funkci

$$g_1(x(k), u(k), k) = h(x(k+1)) - h(x(k)) = h(f(x(k), u(k), k)) - h(x(k))$$

Potom

$$\sum_{k=k_0}^{k_1-1} g_1(x(k), u(k), k) = h(x(k_1)) - h(x(k_0))$$

Protože $h(x(k_0))$ nezávisí na řízení, nemůžeme tento člen v kritériu uvažovat a kritérium vujádříme ve tvaru

$$\sum_{k=k_0}^{k_1-1} (g(x(k), u(k), k) + g_1(x(k), u(k), k))$$

Problém diskrétního optimálního řízení na konečném intervalu je konečněrozměrný problém. Tím se zásadně liší od spojitých problémů optimalizace.

Formálně je problém diskrétního optimálního řízení podobný spojitému problému řízení - je to úloha Bolzova typu.

Optimální řízení závisí na počátečním čase k_0 a počátečním stavu $x(k_0) = x_0$. Koncový bod trajektorie může být libovolný (penalizační faktor $h(x(k_1))$ zajistí pouze přibližné dosažení cíle).

V problému s volným koncem může být koncový stav určen cílovou množinou C , $x(t_1) \in C$ - pak se jedná o problém s pohyblivým koncem.

Je-li cíl C bod, jedná se o problém s pevným koncem a první člen v kritériu není třeba uvažovat, neboť je konstantní.

Obecný tvar Bolzova problému převedeme na problém Mayerova typu:

Zavedeme další stavovou souřadnici

$$x_{n+1}(k) = \sum_{i=k_0}^{k_1-1} g(x(i), u(i), i)$$

kteřá vyhovuje diferenční rovnici

$$x_{n+1}(k+1) = x_{n+1}(k) + g(x(k), u(k), k), \quad x_{n+1}(k_0) = 0.$$

Kritérium je pak

$$J = h(x(k_1)) + x_{n+1}(k_1) =: h(\bar{x}(k_1)),$$

kde $\bar{x} = [x^T, x_{n+1}]^T$ je rozšířený stav.

Převod spojitého optimalizačního problému na diskrétní

Diferenciální stavové rovnice spojitého systému i spojitě kritérium můžeme počítat numericky. Problém je v diskretizaci řídicí veličiny $u(t)$.

Diskretizaci provedeme volbou periody vzorkování T a spojitý čas t převedeme na diskrétní čas k podle $t = kT$.

Volba periody vzorkování T závisí především na dynamických vlastnostech systému, celkové době řízení $(t_1 - t_0)$ a výpočetních možnostech.

Řízení spojitého systému můžeme předpokládat konstantní během periody vzorkování

$$u(\cdot) = u(k), \quad \text{pro } kT \leq t < (k+1)T,$$

Případně můžeme řízení aproximovat složitější funkcí (například lineární nebo kvadratickou funkcí či aproximovat splíny).

Použijeme-li nejjednodušší Eulerovu metodu integrace diferenciálních rovnic systému i kritéria, pak spojitý optimalizační problém

$$\min_{u(\cdot)} \left\{ J = h(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} g(x, u, t) dt, \quad \dot{x}(t) = f(x, u, t) \right\}$$

aproximujeme diskrétním optimalizačním problémem

$$\min_{u(k)} \left\{ J = h(x(k_1)) + T \sum_{k=k_0}^{k_1-1} g(x, u, k), \quad x(k+1) = x(k) + Tf(x, u, k) \right\}$$

Převod diskrétního optimalizačního problému na úlohu matematického programování

Existují spolehlivé numerické algoritmy řešení úloh matematického programování.

Proto je výhodný převod problému optimálního řízení diskrétního dynamického systému na úlohu matematického programování (bez aproximace).

Pro konečnou dobu diskrétního řízení $(k_1 - k_0)$ hledáme konečný počet optimálních hodnot řízení $u^*(k_0)$ až $u^*(k_1 - 1)$.
Také spojitý optimalizační problém převádíme často na úlohu matematického programování. V tomto případě se vždy jedná o aproximaci.

Nejjednodušší převod diskrétního optimalizačního problému:
Zavedení složeného vektoru z tvořeného řídicími veličinami

$$z = [u^T(k_0), u^T(k_0 + 1), \dots, u^T(k_1 - 1)]^T$$

Řešením stavových rovnic diskrétního systému vypočteme stavy diskrétního systému a pak hodnotu kritéria $J(z)$.

Diskrétní problém optimálního řízení je úlohou matematického programování

$$\min_z \{J(z) : z \in Z\}$$

kde množina Z je dovolená množina řízení.

V této formulaci nemůžeme respektovat omezení stavových veličin.

Jiný způsob:

Abychom mohli respektovat stavová omezení, je třeba zahrnout stavové veličiny do rozšířeného vektoru z

$$z = [x^T(k_0), u^T(k_0), x^T(k_0 + 1), \dots, x^T(k_1 - 1), u^T(k_1 - 1), x^T(k_1)]^T$$

Koncový čas t_1 je pevný. Vyřešením této třídy úloh vyřešíme pro $i = k_0$ a $x = x_0$ také naši původní úlohu.

Zavedeme optimální funkci $V(x, i)$

$$V(x, i) = \min_{u(i), \dots, u(k_1 - 1)} J(i, x, u(k_0), \dots, u(k_1 - 1))$$

Jednoduchou úpravou

$$V(x, i) = \min_{u(i)} \left\{ g(x, u(i), i) + \min_{u(i+1), \dots, u(k_1 - 1)} \left[h(x(k_1)) + \sum_{k=i+1}^{k_1-1} g(x(k), u(k), k) \right] \right\}$$

Druhý člen na pravé straně předchozí rovnice je roven $V(x(i+1), i+1) = V(f(x, u(i), i), i+1)$.

Proto pro optimální funkci platí funkcionální rekurentní předpis **Bellmanova rovnice**

$$V(x, i) = \min_{u(i)} \{ g(x, u(i), i) + V(f(x, u(i), i), i+1) \}$$

Okrajová podmínka je

$$V(x, k_1) = h(x(k_1))$$

kde h je hodnocení cíle v kritériu.

Výpočet optimální funkce je principiálně jednoduchý.

Pro všechna $x = x(k_1) \in X$ určíme optimální funkci $V(x, k_1)$.

Potom v rekurentním vztahu položíme $i = k_1 - 1$ a pro všechna $x = x(k_1 - 1) \in X$ určíme optimální funkci $V(x, k_1 - 1)$.

Tak pokračujeme pro $k = k_1 - 2$ až do $k = k_0$.

Rekurentní předpis jsme dostali využitím aditivních vlastností kritéria.

Omezení daná stavovými rovnicemi respektujeme vektorovou funkcí

$$\tau(z) = \begin{bmatrix} x(k_0 + 1) - f(x(k_0), u(k_0), k_0) \\ \vdots \\ x(k_1) - f(x(k_1 - 1), u(k_1 - 1), k_1 - 1) \end{bmatrix}$$

Kritérium je opět závislé na vektoru z . Ekvivalenční problém matematického programování

$$\min_z \{J(z) : \tau(z) = 0, z \in Z\}$$

kde množina Z respektuje omezení kladená na stavy i řízení.

Problémy s pevným koncovým stavem můžeme pomocí penalizačních metod převést na problémy bez omezení na koncový stav.

Optimalizace dynamických systémů se nejčastěji řeší tímto způsobem.

Řešení problému diskrétního optimálního řízení pomocí DP

Pro diskrétní dynamický systém s počátečním stavem $x(k_0) = x_0$, hledáme takové řízení $u(k)$ na intervalu $k \in [k_0, k_1 - 1]$, aby bylo minimální kritérium, při splnění všech omezení na stavy a řízení.

Tuto jedinou úlohu vnoříme do třídy úloh určených optimálního řízení stejného dynamického systému, kde ale uvolníme počáteční čas (který označíme i); počáteční stav (který označíme x). Kritérium optimality je potom

$$J(i, x, u(k_0), \dots, u(k_1 - 1)) = h(x(k_1)) + \sum_{k=i}^{k_1-1} g(x(k), u(k), k)$$

Optimální trajektorii od diskrétního času $k = i$ do konce $k = k_1$ jsme hledali mezi trajektoriami, které jsou libovolné v prvním kroku pro $k = i$ a v dalších krocích jsou již optimální.

Při tom vycházíme ze stavu, do kterého jsme se dostali vlivem předchozího řízení. Mezi všemi těmito trajektoriami je i optimální trajektorie.

Princip optimality jsme zde využili v poněkud jiném tvaru, než byl dříve vysloven.

Původní formulace principu optimality byla vyslovena ve tvaru nutné podmínky optimality.

Zde jsme použili **princip optimality ve tvaru postačující podmínky**:

Interval řízení rozdělíme na dva subintervaly. Jestliže je řízení na druhém intervalu optimální vzhledem ke stavu vzniklém jako výsledek v prvním intervalu řízení a řízení v prvním intervalu je optimální, pak je řízení optimální na celém intervalu.

Vypočteme-li optimální funkci $V(x, i)$ pro všechna $i \in [k_0, k_1]$ a $x \in X$, snadno určíme optimální řízení $u^*(k)$, $k \in [k_0, k_1 - 1]$. Pro optimální řízení $u^*(k)$ platí

$$g(x(k), u^*(k), k) = V(x(k), k) - V(f(x(k), u^*(k), k), (k+1))$$

Pro neoptimální řízení platí místo rovnosti nerovnost $\geq$.

Dovolenu množinu stavů je třeba diskretizovat a optimální funkci $V(x, i)$ počítáme pouze v těchto diskrétních bodech sítě stavů. Nároky na paměť při numerickém výpočtu jsou značné.

Bellmanem označené "prokletí rozměrnosti" nám často znemožní řešení složitějšího problému.

Jednoduchý příklad, ve kterém vhodnou diskretizací nejsou obtíže vznikající při reálných problémech.

Příklad 2: Jednoduchý diskrétní systém prvního řádu

$x(k+1) = x(k) + u(k), \quad x(0) = 5$

Kritérium jakosti řízení

$J(u(k)) = 2,5(x(10) - 2)^2 + \sum_{k=0}^9 (x^2(k) + u^2(k))$

Stavy a řízení jsou omezeny

$0 \leq x(k) \leq 8, \quad -2 \leq u(k) \leq 2$

Cílová množina je

$0 \leq x(10) \leq 2$

Hledáme optimální řízení $u^*(k)$, které minimalizuje kritérium, respektuje omezení a které převádí počáteční stav $x(0) = 5$ do určeného cíle.

Pro numerické řešení budeme diskretizovat množinu stavů i řízení

$x = \{0, 1, 2, \dots, 8\}, \quad u = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Tabulka 4: Výpočet optimální funkce $V(x, i) = V(0, 9)$

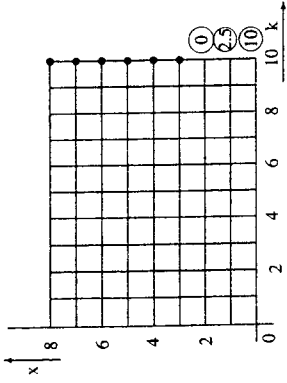
$u(i)$	$g(x, u, i) = x^2 + u^2$	$x(10) = 0 + u(9)$	$V(x(10), 10)$	$V + g$
-2	*	-2	*	*
-1	*	-1	*	*
0	0	0	10	10
1	1	1	2,5	3,5
2	4	2	0	4

V posledním sloupci předešlé tabulky jsou vypočteny hodnoty výrazu

$\{0 + u^2(9) + V((0 + u(9)), 10)\}.$

Hledáme minimum tohoto výrazu. Proto $V(0, 9) = 3,5$ a tomu odpovídá optimální řízení $u^*(x, i) = u^*(0, 9) = 1$. Stav $x(10) = -2$ a $x(10) = -1$ nesplňují omezení a proto výpočet pro ně neprovádíme (značíme je hvězdičkou).

Podobně pro čas $i = 9$ a stav $x(9) = 1$ vypočítáme optimální funkci $V(1, 9)$ a optimální řízení $u^*(x, i) = u^*(1, 9)$ podle následující tabulky:



Optimální funkci $V(x, i)$ počítáme "od zadu" z koncového času $k = 10$.

$V(x, 10) = 2,5(x - 2)^2$

a proto $V(0, 10) = 10, V(1, 10) = 2,5, v(2, 10) = 0$. Bellmanova rovnice

$V(x, i) = \min_{u \in U} \{x^2 + u^2(i) + V((x + u(i)), (i + 1))\}$

s okrajovou podmínkou $V(x, 10)$.

Pro $i = 9$ vypočítáme optimální funkci pro stav $x(9) = 0$ podle následující tabulky.

Tabulka 5: Výpočet optimální funkce $V(x, i) = V(1, 9)$

$u(9)$	$g(x, u, i) = x^2 + u^2$	$x(10) = 1 + u(9)$	$V(x(10), 10)$	$V + g$
-2	*	-1	*	*
-1	2	0	10	12
0	1	1	2,5	3,5
1	2	2	0	2
2	*	3	*	*

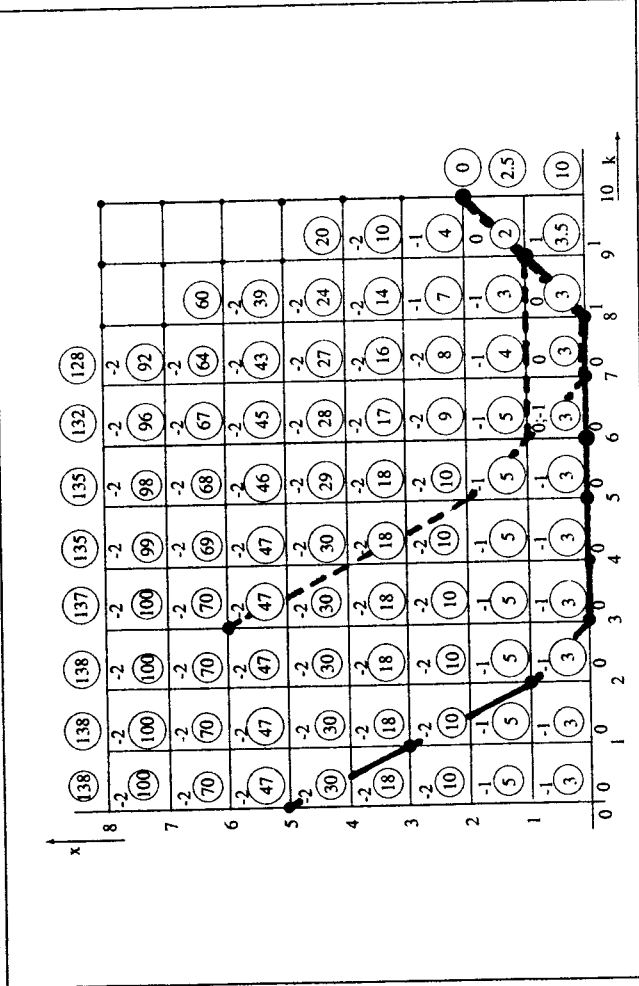
Optimální funkce je určena minimem v posledním sloupci, $V(1, 9) = 2$ a optimální řízení $u^*(x, i) = u^*(1, 9) = 1$.

Podobně vypočítáme stejnou tabulku pro $i = 9$ a $x(9) = 2$ až $x(9) = 8$. Stejně postupujeme pro čas $i = 8$ atd. až dospějeme k $i = 0$.

Pro $i = 0$ a $x(0) = 5$ vyřešíme naši původní úlohu.

Ke každému bodu sítě stavů vypočítáme optimální funkci $V(x, i)$ - viz obr. 20. V obr. 20 je hodnota optimální funkce uvedena u každého bodu sítě v kroužku.

Optimální řízení $u^*(x, i)$ je uvedeno na obr. 20 v každém bodě sítě pod hodnotou optimální funkce.



Obrázek 20: Optimální funkce a optimální řízení z příkladu 2.

Řešení některých speciálních úloh dynamickým programováním

Princip optimality a princip invariantního vnoření jsou obecné principy metody dynamického programování. Použijeme je pro řešení úloh statické optimalizace.

Volba optimálního nákladu

Máme n typů zboží a chceme naložit přepravní jednotku o dovoleném zatížení z_{max} takovým nákladem, jehož cena je nejvyšší.

Podobné problémy vznikají při volbě optimálního nákladu lodí, kontejnerů a pod. tak, aby přepravní zisk byl maximální.

Označme: w_i - cena jednoho předmětu i -tého typu, w_i - váha jednoho předmětu i -tého typu, x_i - počet předmětů i -tého typu.

Hledáme maximum lineární formy

$$\max_{x_i} \left\{ J_n = \sum_{i=1}^n x_i w_i : \sum_{i=1}^n x_i w_i \leq z_{max}, x_i = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

Jedná se tedy o lineární problém, proměnné x_i jsou přirozená čísla.

Pokud bychom netvali na celočíslnosti proměnných x_i , pak bychom za náklad vybrali to zboží, jehož cena na jednotku váhy je nejvyšší.

Na obr. 20 je silnou čarou zakreslena spojnice bodů optimální trajektorie z počátečního stavu $x(0) = 5$ do cíle.

Optimální řídící posloupnost

$$u^*(k) = \{-2; -2; -1; 0; 0; 0; 0; 1; 1\}$$

Optimální trajektorie z počátečního stavu $x(3) = 6$ je na obr. 20 nakreslena čárkovaně (není jednoznačná).

Při jiné diskretizaci množiny dovolených hodnot řízení by vznikly obtíže, běžné při řešení většiny reálných problémů. Zvolíme množinu možných hodnot řízení

$$u = \{-2; -1; 0; 0, 5; 1; 1, 5; 2\}$$

Vypočítáme nyní pro $x = x(9) = 0$ optimální funkci. Řízení $u = -2$ a $u = -1$ neuvažujeme, neboť v bodě $x(9) = 0$ nejsou přípustná. Sestavíme opět tabulku.

Tabulka 6: Jiná diskretizace přípustných řízení. Výpočet $V(x, i) = V(0, 9)$

$u(9)$	$g(x, u, i) = x^2 + u^2$	$x(10) = 0 + u(9)$	$V(x(10), 10)$	$V + g$
0	0	0	10	10
0,5	0,25	0,5	α	$0,25 + \alpha$
1	1	1	2,5	3,5
1,5	2,25	1,5	β	$2,25 + \beta$
2	4	2	0	0

Optimální funkci $V(x(10), 10)$ jsme v bodě $x(10) = 0, 5$ v předchozím kroku neurčili.

Vybrali bychom tedy zboží typu k , pro které platí

$$k = \arg \max_{k=1, \dots, n} \frac{v_k}{w_k} \\ \text{a maximální cena nákladu je } J^* = \frac{v_k}{w_k} z_{max}.$$

Při požadavku celistvosti se optimální řešení může od předchozího značně lišit.

Úlohu řešíme pomocí dynamického programování:

Vnoříme ji do celé třídy úloh - počet druhů zboží je postupně $j = 1, 2$ až n a dovolená zálež je z , $0 \leq z \leq z_{max}$.

Hledáme maximum

$$\max_{x_i} \left\{ J_j(x, z) = \sum_{i=1}^j x_i v_i, \quad j = 1, 2, \dots, n : \sum_{i=1}^j x_i w_i \leq z, \quad 0 \leq z \leq z_{max}, \quad x_i = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

Zavedeme si optimální funkci

$$V_j(z) = \max_{x_i} J_j(x, z),$$

kteří je rovna maximální ceně nákladu o váze z , složeného z j druhů zboží.

Rekurentní vztah pro $V_j(z)$:

Optimální funkci vyjádíme

$$V_j(z) = \max_{x_j} \left(x_j v_j + \max_{x_1, \dots, x_{j-1}} \sum_{i=1}^{j-1} x_i v_i \right)$$

Omezení na dovolenou nosnost z upravíme

$$\sum_{i=1}^{j-1} x_i w_i \leq z - x_j w_j.$$

Předchozí vztahy vedou na Bellmanovu rovnici

$$V_j(z) = \max_{x_j} (x_j v_j + V_{j-1}(z - x_j w_j))$$

s okrajovou podmínkou $V_0(z) = 0$.

Bellmanovu rovnici řešíme postupně pro $j = 1, 2$ až n .

Maximalizaci hledáme pro přirozená x_j , která se mění v mezích $x_j \in [0, \left\lceil \frac{z_{max}}{w_j} \right\rceil]$, kde $\left\lceil \frac{z_{max}}{w_j} \right\rceil$ značí nejvyšší přirozené číslo menší nebo rovné z_{max}/w_j .

Pro $j = n$ a $z = z_{max}$ vyřešíme naši původní úlohu a při tom máme k dispozici všechna řešení při jiných omezeních.

Nejkraší cesta sítí

Mějme n bodů očíslovaných $1, 2$ až n .

Nechť čas potřebný k překonání vzdálenosti z bodu i do j je roven t_{ij} .

Obecně může platit $t_{ij} \neq t_{ji}$.

Předpokládáme, že $t_{ij} \geq 0$. Nemí-li přechod z bodu i do j možný, pak $t_{ij} \rightarrow \infty$ a pro úplnost zřejmě $t_{ii} = 0$.

Všechny body jsou tedy navzájem spojeny orientovanými spojnícemi, které jsou ohodnoceny veličinou t_{ij} . Body a spojovací cesty mezi nimi tvoří síť - orientovaný graf.

Naším úkolem je určit takovou cestu sítí spojující dva dané body, pro jejíž překonání je potřeba nejmenší čas.

Tento problém vzniká při letecké, lodní i automobilové dopravě, při předávání zpráv ve sdělovacích sítích a pod..

Úloha je totožná s problémem časové optimálního řízení, interpretujeme-li uzly grafu jako stavy systému a větve grafu jako transformace z jednoho stavu do stavu druhého.

Veličina t_{ij} je čas přechodu ze stavu i do j . Zřejmě t_{ij} může být i jiné ohodnocení přechodu ze stavu i do j (např. spotřeba energie).

Uzly grafu - body $1, 2$ až n - jsou stavy procesu, počáteční stav je stav p a koncový stav je stav m .

Řešení dynamickým programováním:

Jedinou úlohu - určen optimální trajektorie ze stavu p do m vnoříme do třídy úloh.

Hledáme optimální cestu z libovolného stavu j , kde $j = 1, 2, \dots, n$, do pevně určeného cílového stavu m tak, aby počet mezilehlých stavů byl nejvýše k ($k = 0, 1, \dots, (n - 2)$).

Protože žádná trajektorie nemá smyčky, může mít libovolná trajektorie nejvýše $(n - 2)$ mezilehlých stavů.

Optimální čas přechodu ze stavu j do cíle při nejvýše k mezilehlých stavech označíme $V_j(k)$ - to je optimální funkce pro naši úlohu. Platí

$$V_j(0) = t_{jm},$$

což je přímý přechod z j do m . To je okrajová podmínka pro rekurentní výpočet $V_j(k)$.

Pro optimální funkci

$$V_j(k) = \min_{i=1, \dots, (n-1)} (t_{ji} + V_i(k - 1)), \quad k = 1, 2, \dots, (n - 2)$$

Předchozí rekurentní vztah je Bellmanova rovnice pro řešení naší úlohy.

Zřejmě $V_p(n - 2)$ je rovno minimální hodnotě kritéria pro přechod ze stavu p do cíle m .

Po výpočtu optimální funkce $V_j(k)$ konstruujeme optimální trajektorii následujícím postupem:

Z počátečního stavu p se nejprve pohybujeme do stavu i_1 (první mezilehlý stav), platí-li pro něj

$$t_{pi_1} = V_p(n - 2) - V_{i_1}(n - 2 - 1)$$

Z bodu i_1 se potom dále pohybujeme do bodu i_2 , platí-li pro něj

$$t_{i_1 i_2} = V_{i_1}(n - 3) - V_{i_2}(n - 4)$$

Tak postupujeme dále, obecně z bodu i_a se pohybujeme do i_{a+1} , platí-li

$$t_{i_a i_{a+1}} = V_{i_a}(n - 2 - a) - V_{i_{a+1}}(n - 2 - (a + 1))$$

Nejvýše po $(n - 1)$ krocích se tímto postupem dostaneme po optimální trajektorii do cíle.

Hledíme nyní suboptimální trajektorii - například druhou nejlepší.
Druhou nejmenší hodnotu kritéria z bodu j do cíle při nejvýše k mezilehlých stavech si označíme $U_j(k)$.

$$\text{Zřejmě } U_j(0) \text{ neexistuje, neboť přímý přechod je jediný. Zřejmě}$$

$$U_j(1) = \min_{i=1,2,\dots,(n-1)} [t_{ji} + V_i(k-1) + t_{ji} + U_i(k-1)]$$

kde $\min^2$ je označení pro výběr druhé nejmenší hodnoty, která je různá od minima a $V_j(k)$ je optimální funkce pro původní úlohu.

Hledáme-li trajektorii, po které největší hodnota t_{ij} je co možno nejmenší, pak opět vnoříme naši úlohu do třídy úloh.

Optimální hodnotu kritéria při cestě z bodu j do cíle m přes nejvýše k mezilehlých bodů, označíme nyní jako $S_j(k)$. Zřejmě $S_j(0) = t_{jm}$ a rekurentní vztah pro $S_j(k)$ je

$$S_j(k) = \min_{i=1,2,\dots,(n-1)} [\max(t_{ji}, S_i(k-1))]$$

Z optimální funkce $S_j(k)$ můžeme opět rekonstruovat optimální trajektorii.

Úloha o falešné minci

m mincí, mezi nimi je jedna mince těžší (je falešná).
Pomocí minimálního počtu vážení chceme určit falešnou minci (použitím vahadlových vah bez závažů).

Řešení: Z mincí vybereme dvě skupiny o u mincích a zvažíme.

Misky v rovnováze - falešná mince je ve zbylých $(x - 2u)$ mincích, které jsme nevážili.

Nebudou-li misky v rovnováze - falešná mince je v u mincích na těžší straně. Omezení $1 \leq u \leq m/2$.

To opakujeme se skupinou mincí, mezi nimiž je falešná, až určíme jednoznačně falešnou minci.

Proces opakovaného vážení je vlastně diskrétní proces, kde počet mincí m je výchozí stav procesu, u je řídicí veličina procesu a přirozené číslo k je pořadové číslo vážení.

Jedná se o úlohu časové optimálního diskrétního řízení. Hledáme minimální počet pokusů - označíme ho k^* - takový, abychom z počátečního stavu $x(0) = m$ přešli do koncového stavu $x(k^*) = 1$.

Pro stav procesu v etapě $(k + 1)$ (po $(k + 1)$ vážení)

$$x(k+1) = \begin{cases} x(k) - 2u(k) & \text{jsou-li váhy v rovnováze} \\ u(k) & \text{nejsou-li váhy v rovnováze} \end{cases}$$

Toto je stavová rovnice procesu. Všimněme si, že je v ní neurčitost.

Řídicí veličina $u(k)$ je rovna počtu mincí na miskách vah při $(k + 1)$ vážení, je omezena $1 \leq u(k) \leq x(k)/2$.

Velmi podobný je **problém obchodního cestujícího (Travelling Salesmen Problem - TSP)**:

Je známá matice vzdáleností mezi městy. Obchodní cestující musí projít postupně všemi místy a navrátit se do výchozího města a při tom součet všech cest musí být minimální.

Tento problém má faktoriální složitost. Bývá testem efektivnosti různých optimalizačních algoritmů.

Také pro tento problém můžeme nalézt Bellmanovu rovnici

Města očíslovíme přirozenými čísly $\{1, 2, \dots, n\}$. Vycházíme a končíme např. v městě 1.

Vzdálenost z města i do města j označíme $l(i, j)$.

Nechť $V(i, S)$ je nejkratší cesta z města i do 1, která prochází městy v množině S vždy pouze jednou. Bellmanova rovnice

$$V(i, S) = \min_{j \in S} \{l(i, j) + V(j, S - \{i, j\})\}$$

Výsledek je $V(1, \Omega - \{1\})$, kde Ω je množina všech měst.

Nejprve určíme $V(i, 0) = l(i, 1)$, což je přímá cesta z města i do města 1, potom vypočítáme $V(i, j)$, což je cesta z města i do 1 přes město j atd.

Pro symetrického TSP (kde $l(i, j) = l(j, i)$) je $\frac{(n-1)!}{2}$ různých cest.

Řešení dynamickým programováním:

Problém vnoříme do třídy úloh s libovolným počátečním stavem $x(0) = x$ (počet mincí).

Zavedeme si optimální funkci $V(x)$, která je rovna minimálnímu počtu vážení, v nejméně příznivém případě, pro určení jedné falešné mince mezi x mincemi. Zřejmě platí

$$V(0) = 0, \quad V(1) = 0, \quad V(2) = 1, \quad V(3) = 1$$

což budou okrajové podmínky pro Bellmanovu rovnici.

Z x mincí vezmeme dvě skupiny po u mincích, uděláme vážení a v nehorším případě bude falešná mince mezi $\max\{x - 2u, u\}$ mincemi.

Další postup již volíme optimálně. Vybereme-li u v prvním pokusu optimální, pak podle principu optimality postupujeme optimálním způsobem.

Pro optimální funkci $V(x)$ platí rekurentní vztah

$$V(x) = 1 + \min_{1 \leq u(k) \leq \frac{x}{2}} \{\max[V(x - 2u), V(u)]\}$$

Poznámka: Optimální u bude zřejmě takové, že počet mincí x rozdělíme vždy na tři pokud možno stejné skupiny ($u, u, x - 2u$). Proto

$$u^* = \begin{cases} \frac{x}{3} & \text{pro } x = 3i \\ \frac{x-1}{3} & \text{pro } x = 3i + 1 \\ \frac{x+1}{3} & \text{pro } x = 3i + 2 \end{cases}$$

kde i je celé číslo.

Řešení spojitě úlohy optimálního řízení pomocí DP

Spojité systém

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

Hledáme $u^*(t) \in U, t \in [t_0, t_1]$, které převádí počáteční stav $x(t_0)$ do cílového stavu $x(t_1)$ a minimalizuje kritérium

$$J(t_0, x(t_0), u(t)) = h(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), u(t), t) dt$$

Řešení dynamickým programováním: Úlohu vnoříme do třídy úloh - uvolníme počáteční bod.

Hledáme $u^*(t) \in U$ na intervalu $t \in [\tau, t_1]$, které převádí počáteční stav $x(\tau) = x$ v čase $\tau \in [t_0, t_1]$ do koncového stavu $x(t_1)$ v čase t_1 a minimalizuje kritérium.

Kritérium má nyní dolní integrační mez rovnou počátečnímu času τ , je tedy závislé na $J(\tau, x, u(t))$.

Zavedeme optimální (Bellmanovu) funkci

$$V(x, \tau) = \min_{u(t), t \in [\tau, t_1]} J(\tau, x, u^*(t))$$

Interval řízení $t \in [\tau, t_1]$ rozdělíme na dva subintervaly $[\tau, \tau + \Delta\tau]$ a $[\tau + \Delta\tau, t_1]$.

Při optimálním řízení $u^*(t)$ platí pro Bellmanovu funkci

$$V(x, \tau) = \int_{\tau+\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} g(x, u^*, t) dt + h(x(t_1)) + \int_{\tau+\Delta\tau}^{t_1} g(x, u^*, t) dt.$$

Odtud

$$V(x, \tau) = \int_{\tau+\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} g(x, u^*, t) dt + V(x + \Delta x, \tau + \Delta\tau).$$

Má-li optimální funkce $V(x, \tau)$ spojitě derivace, pak

$$\frac{dV(x, \tau)}{d\tau} = \frac{dV(x, \tau)}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{d\tau} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x, u, \tau)$$

Explicitní tvar Bellmanovy rovnice

$$\min_{u(\tau) \in U} \left(g(x, u, \tau) + \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u, \tau) \right) = 0$$

což je obecně nelineární partiální diferenciální rovnice. Okrajová podmínka pro její řešení

$$V(x, t_1) = h(x).$$

Řešením Bellmanovy rovnice z okrajové podmínky dostaneme optimální funkci $V(x, \tau)$ a optimální řízení u^* , které je funkcí okamžitého stavu systému, čili $u^* = u^*(x, \tau)$.

Tim je provedena syntéza řízení - syntéza optimálního zpětnovazebního regulátoru.

Je-li systém časově invariantní, jádro funkcionálu g v kritériu jakosti řízení není závislé na čase a koncový čas t_1 je buď volný, nebo $t_1 \rightarrow \infty$, pak optimální funkce také není explicitně závislá na čase.

$$V(x, \tau) = V(x) \quad \text{a proto} \quad \frac{\partial V}{\partial \tau} = 0$$

Pro existenci Bellmanovy rovnice pro všechny stavy $x \in X$ je nutno učinit předpoklad o diferencovatelnosti Bellmanovy funkce.

Vlivem tohoto předpokladu je Bellmanova rovnice pouze postačující podmínkou optimality.

Najdeme-li z Bellmanovy rovnice řídící funkci $u(x, t)$, která je jejím řešením, pak takové řízení je optimální řízení.

Bellmanovu rovnici můžeme řešit pouze ve speciálních případech. Obvykle ji řešíme diskretizací, nebo přímo diskretizujeme výchozí problém.

neboli

$$V(x + \Delta x, \tau + \Delta\tau) - V(x, \tau) = - \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} g(x, u^*, t) dt$$

Pro $\Delta\tau \rightarrow 0$ dostaneme

$$\frac{dV_+(x, \tau)}{d\tau} = -g(x, u^*, t).$$

Symbol + značí derivaci zprava.

Zvolíme řízení $u(t)$ na prvním intervalu $t \in [\tau, \tau + \Delta\tau]$ libovolně, ale na druhém intervalu $t \in [\tau + \Delta\tau, t_1]$ optimální vzhledem ke stavu $x(\tau + \Delta\tau) = x + \Delta\bar{x}$, který je výsledkem řízení v prvním intervalu.

Pak pro Bellmanovu funkci platí

$$V(x, \tau) \leq \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} g(x, u, t) dt + V(x + \Delta\bar{x}, \tau + \Delta\tau).$$

Odtud pro libovolné $u(t) \in U$

$$\frac{dV_+(x, \tau)}{d\tau} \geq -g(x, u, t).$$

Porovnáním dostaneme

$$\frac{dV_+(x, \tau)}{d\tau} + g(x, u^*, t) = \min_{u \in U} \left(\frac{dV_+(x, \tau)}{d\tau} + g(x, u, t) \right) = 0$$

což je implicitní tvar Bellmanovy rovnice.

Příklad 1: Systém druhého řádu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1, & x_1(0) &= y_1 & |u_1(t)| &\leq \alpha \\ \dot{x}_2 &= u_2, & x_2(0) &= y_2 & |u_2(t)| &\leq \beta \end{aligned}$$

Hledáme optimální řízení, které převede počáteční stav do nuly $x_1(t_1) = x_2(t_1) = 0$ za minimální čas t_1 .

Bellmanova rovnice

$$\min_{u(t) \in U} \left(1 + \frac{\partial V}{\partial y_1} u_1 + \frac{\partial V}{\partial y_2} u_2 \right) = 0, \quad V(0) = 0$$

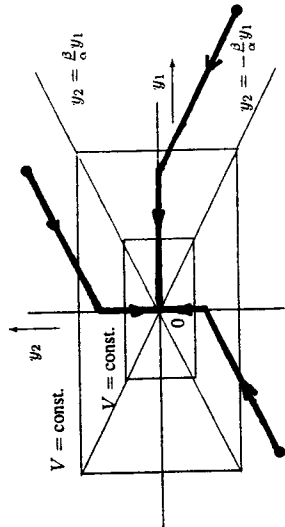
kde $V(y_1, y_2)$ je optimální funkce.

Protože se jedná o dva nezávislé integrátory, bude zřejmě optimální řízení takové, aby vstup integrátorů byl maximální a tím se výstup největší možnou rychlostí blíží nule. Proto

$$u_1^*(y, t) = -\alpha \operatorname{sign} y_1, \quad u_2^*(y, t) = -\beta \operatorname{sign} y_2$$

Optimální Bellmanova funkce je rovna většímu z obou časů, za kterých se oba integrátory vynulují

$$V(y) = \max \left(\frac{1}{\alpha} |y_1|, \frac{1}{\beta} |y_2| \right)$$



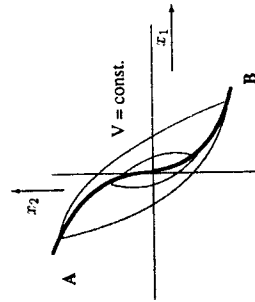
Obrázek 21: Křivky konstantní hodnoty optimální funkce a optimální trajektorie

Optimální trajektorie jsou zakresleny silnými čarami.

Na přímkách $y_2 = \pm \frac{2}{\alpha} y_1$ je Bellmanova funkce nediferencovatelná.

Protože optimální trajektorie, které začínají na zmíněných přímkách, leží celé mimo ně, Bellmanova funkce je na nich diferencovatelná a předchozí Bellmanovu rovnici lze použít.

Je-li počáteční bod $y(0) = y_1$, je optimální řízení nejprve $u^*(t) = +1$, až trajektorie dosáhne v bodě C přepínací křivky. Potom řízení bude $u^*(t) = -1$ a optimální trajektorie se po přepínací křivce blíží k počátku.



Počáteční bod můžeme tedy dosáhnout pouze po přepínací křivce.

Na přepínací křivce v části AO je řízení $u^*(t) = -1$ a v části BO je řízení $u^*(t) = +1$. Bellmanova funkce $V(y)$ pro tento problém je

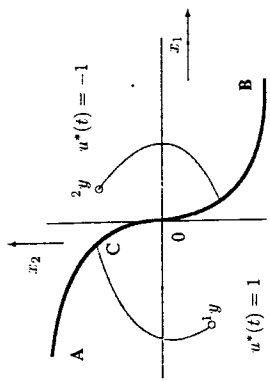
$$V(y) = \begin{cases} -y_2 + 2\sqrt{-y_1 + \frac{1}{2}y_2^2}, & \text{je-li } y \text{ vlevo od } AOB \\ +y_2 + 2\sqrt{y_1 + \frac{1}{2}y_2^2}, & \text{je-li } y \text{ vpravo od } AOB \end{cases}$$

Body konstantní hodnoty Bellmanovy funkce $V(y)$ jsou vyneseny na obr.

Je zřejmé, že na přepínací křivce jsou derivace optimální funkce nespojité. Při tom každá optimální trajektorie probíhá částečně po přepínací křivce. Bellmanovu rovnici nelze v tomto případě použít.

Příklad 2: Hledíme časové optimální řízení systému

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) &= y_1, & |u(t)| &\leq 1 \\ \dot{x}_2 &= u, & x_2(0) &= y_2. \end{aligned}$$



Obrázek 22: Přepínací křivka a optimální trajektorie

Je možno ukázat, že optimální řízení je $u^*(t) = +1$, je-li stav x vlevo od křivky AOB na obr. a $u^*(t) = -1$, je-li stav x vpravo od křivky AOB.

Křivka AOB se nazývá přepínací křivka.

Příklad 3: Dynamickým programováním vyřešíme úlohu o optimálním doběhu stejnosměrného motoru. Jedná se o problém

$$\min_u \left\{ J(u) = \int_0^\infty (u^2(t) + \alpha \omega^2(t)) dt : u(t) = u(t) + \omega(t), \dot{\omega}(t) = u(t) - \omega(t) \right\}$$

Okrajové podmínky jsou $\omega(0) = \omega_0$, $\omega(\infty) = 0$.

Bellmanova rovnice

$$0 = \min_u \left[u^2(t) - \omega(t)u(t) + \alpha \omega^2(t) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \omega} (u(t) - \omega(t)) \right]$$

Optimální funkce nezávisí na čase a proto $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$.

Protože řízení u není omezeno, nalezneme minimum v Bellmanově rovnici derivováním výrazu v závorce podle u , pak

$$2u^*(t) - \omega(t) + \frac{\partial V}{\partial \omega} = 0$$

Dosadíme za $\frac{\partial V}{\partial \omega} = -2u^* - \omega$ z předchozí rovnice zpět do Bellmanovy rovnice

$$(u^*)^2 - \omega u + \alpha \omega^2 + (\omega - 2u^*)(u^* - \omega) = 0$$

Odtud optimální řízení

$$u^* = \omega (1 \pm \sqrt{\alpha})$$

Znaménko + v předchozím výrazu nemá fyzikální význam a proto

$$u^*(t) = \omega(t) (1 - \sqrt{\alpha}), \quad \dot{\omega}(t) = -\sqrt{\alpha} \omega(t)$$

Výsledek souhlasí s řešením stejného příkladu variačními metodami.

ORR - přednáška 13

Dynamické programování

Princip optimality - nutná a postačující podmínka

Princip optimality jako nutná podmínka:
Při optimálním řízení je nutné, aby při libovolně dlouhém trvání period řízení, bylo řízení v druhé periodě optimální vzhledem ke stavu, ve kterém je proces po řízení v první periodě.
Celou periodu řízení (od t_0 do t_1)
$$u[t_0, t_1] = \{u(t_0), u(t_0 + 1), \dots, u(t_1 - 1)\}$$
rozdělíme na dva intervaly $u[t_0, \tau - 1]$ a $u[\tau, t_1 - 1]$.
Kritérium závisí na počátečním stavu a na řízení na daném intervalu.
Na prvním intervalu $J = J(x(t_0), u[t_0, \tau - 1])$ a na druhém intervalu $J = J(x(\tau), u[\tau, t_1 - 1])$.
Předpokládejme, že platí
$$J(x(t_0), u[t_0, t_1 - 1]) = \nu(\underbrace{x(t_0)}_{\alpha}, \underbrace{u[t_0, \tau - 1]}_{\beta}, \underbrace{J(x(\tau), u[\tau, t_1 - 1])}_{\gamma})$$
kde funkce $\nu(\alpha, \beta, \gamma)$ je taková, že pro libovolné α, β
$$\nu(\alpha, \beta, \tilde{\gamma}) < \nu(\alpha, \beta, \gamma), \quad \text{pokud} \quad \tilde{\gamma} < \gamma,$$
Pak pro $t_1 - t_0 \geq 2$ platí princip optimality ve tvaru nutné podmínky.
Princip optimality ve tvaru nutné podmínky platí pouze tehdy - pokud je důležitý kritérium menší, pak celkové kritérium musí být také menší.
Předchozí podmínky jsou podstatné pro splnění principu optimality. Jsou splněny pro Lagrangeovu, Mayerovu i Bolzovu úlohu.

© J. Štěcha, 2003

ORR - přednáška 13

Dynamické programování

394

ORR - přednáška 13

Dynamické programování

Lineární, kvadraticky optimální řízení (LQ řízení)

Diskrétní verze LQ řízení spočívá v optimálním řízení systému $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ minimalizující kvadratické kritérium
$$J = \frac{1}{2}x^T(k_1)Sx(k_1) + \sum_{k=1}^{k_1-1} \frac{1}{2}x^T(k)Qx(k) + \frac{1}{2}u^T(k)Ru(k)$$
Optimální (Bellmanovu) funkci volíme ve tvaru kvadratické formy $V(x, k) = \frac{1}{2}x^T(k)P(k)x(k)$.
Bellmanova rovnice
$$V(x, k) = \min_u \{ \frac{1}{2}x^T(k)Qx(k) + \frac{1}{2}u^T(k)Ru(k) + \frac{1}{2}(Ax(k) + Bu(k))^T P(k+1)(Ax(k) + Bu(k)) \}$$
Nutná podmínka minima v předchozí záorce je nulovost první derivace
$$Ru(k) + B^TP(k+1)Ax(k) + B^TP(k+1)Bu(k) = 0$$
Odtud plyne optimální řízení
$$u^*(k) = - \left(R + B^TP(k+1)B \right)^{-1} B^TP(k+1)Ax(k)$$
Optimální řízení vede na lineární časově proměnnou stavovou zpětnou vazbu.
Neznámou matici $P(k)$ získáme dosazením optimálního řízení do předchozího vztahu. Matice $P(k)$ je řešením Riccatovy rovnice z koncové podmínky $P(k_1) = S$.
Další podrobnosti lze nalézt ve speciální literatuře.

© J. Štěcha, 2003

ORR - přednáška 13

Dynamické programování

393

ORR - přednáška 13

Dynamické programování

Příklad 1: Systém a omezení řízení

$$x(t+1) = u(t), \quad x(0) = 2, \quad t \in [0, 2], \quad |u(t)| \leq 1, \quad \text{pro } t \in [0, 1], \quad -1 \leq u(2) \leq 0$$
Kritérium
$$J(u) = \sum_{t=0}^1 x(t) \cdot x(t+1) \cdot x(t+2)$$
Kritérium upravíme
$$J = x(0) \cdot x(1) \cdot x(2) + x(1) \cdot x(2) \cdot x(3) = x(0) \cdot u(0) \cdot u(1) + u(0) \cdot u(1) \cdot u(2) = u(0) \cdot u(1) \cdot [x(0) + u(2)]$$
Jeho minimum $J^* = -2$ je pro
$$u^*(0) = 1, \quad u^*(1) = -1, \quad u^*(2) = 0$$
Nyní proces rozdělíme na dva subintervaly $[0, 1]$ a $[1, 2]$.
Na konci první periody je $x^*(1) = 1$ (protože $u^*(0) = 1$).
Pro druhou periodu platí
$$J(x^*(1), u[1, 2]) = \sum_{t=1}^1 x(t)x(t+1)x(t+2) = x(1)x(2)x(3) = u(1)u(2)$$
minimum je pro $\bar{u}(1) = 1, \bar{u}(2) = -1$, což ale nesouhlasí s optimálním řízením na druhé periodě.
Není totiž splněna podmínka $\nu(\alpha, \beta, \tilde{\gamma}) < \nu(\alpha, \beta, \gamma)$, pro $\tilde{\gamma} < \gamma$.

© J. Štěcha, 2003

ORR - přednáška 13

Dynamické programování

395

ORR - přednáška 13

Dynamické programování

Princip optimality - nutná a postačující podmínka

Princip optimality jako nutná podmínka:
Při optimálním řízení je nutné, aby při libovolně dlouhém trvání period řízení, bylo řízení v druhé periodě optimální vzhledem ke stavu, ve kterém je proces po řízení v první periodě.
Celou periodu řízení (od t_0 do t_1)
$$u[t_0, t_1] = \{u(t_0), u(t_0 + 1), \dots, u(t_1 - 1)\}$$
rozdělíme na dva intervaly $u[t_0, \tau - 1]$ a $u[\tau, t_1 - 1]$.
Kritérium závisí na počátečním stavu a na řízení na daném intervalu.
Na prvním intervalu $J = J(x(t_0), u[t_0, \tau - 1])$ a na druhém intervalu $J = J(x(\tau), u[\tau, t_1 - 1])$.
Předpokládejme, že platí
$$J(x(t_0), u[t_0, t_1 - 1]) = \nu(\underbrace{x(t_0)}_{\alpha}, \underbrace{u[t_0, \tau - 1]}_{\beta}, \underbrace{J(x(\tau), u[\tau, t_1 - 1])}_{\gamma})$$
kde funkce $\nu(\alpha, \beta, \gamma)$ je taková, že pro libovolné α, β
$$\nu(\alpha, \beta, \tilde{\gamma}) < \nu(\alpha, \beta, \gamma), \quad \text{pokud} \quad \tilde{\gamma} < \gamma,$$
Pak pro $t_1 - t_0 \geq 2$ platí princip optimality ve tvaru nutné podmínky.
Princip optimality ve tvaru nutné podmínky platí pouze tehdy - pokud je důležitý kritérium menší, pak celkové kritérium musí být také menší.
Předchozí podmínky jsou podstatné pro splnění principu optimality. Jsou splněny pro Lagrangeovu, Mayerovu i Bolzovu úlohu.

© J. Štěcha, 2003

ORR - přednáška 13

Dynamické programování

394

ORR - přednáška 13

Dynamické programování

Příklad 2: Systém a omezení řízení

$$x(t+1) = x(t) + u(t), \quad x(0) = 1, \quad t \in [0, 2], \quad |u(t)| \leq 1$$
Kritérium
$$J(u) = \max_{0 \leq t \leq 3} |x(t)|$$
Úprava kritéria
$$J(u) = \max \{ |x(0)| = 1, |1 + u(0)| = |x(1)|, |x(2)| = |1 + u(0) + u(1)|, |x(3)| = |1 + u(0) + u(1) + u(2)| \}$$
Minimum kritéria je $J(u^*) = 1$, pro $u^*(0) = -1, u^*(1) = -1, u^*(2) = 1$.
Pro druhou část začínám z $x^*(1) = 0$, pak
$$J(u) = \max_{1 \leq t \leq 3} |x(t)| = \max \{ x^*(1) = 0, |x(2)| = |0 + u(1)|, |x(3)| = |0 + u(1) + u(2)| \}$$
Minimum je $J(u^*) = 0$, pro $\bar{u}(1) = 0, \bar{u}(2) = 0$, což opět nesouhlasí s optimálním řízením na druhé periodě.

© J. Štěcha, 2003

ORR - přednáška 13

Dynamické programování

395

Princip optimality jako postačující podmínka:

Je-li řešení v druhé periodě optimální vzhledem ke stavu, který je výsledkem řešení v první periodě a řešení v první periodě je optimální, pak řešení na celém intervalu je optimální.

Postačující podmínka platí při oslabené podmínce ve tvaru:

Předpokládáme, že diskrétní proces splňuje všechna omezení a kritérium splňuje oslabenou podmínku

$$\nu(\alpha, \beta, \bar{\gamma}) \leq \nu(\alpha, \beta, \gamma), \quad \text{pokud} \quad \bar{\gamma} \leq \gamma,$$

To znamená, pokud je důlčí kritérium menší nebo rovno (není horší) než jiné důlčí kritérium, pak celkové kritérium také nesmí být horší.

V příkladu 2 je oslabená podmínka splněna a proto zde platí princip optimality jako postačující podmínka.

PRINCIP MAXIMA

Pontrjaginův princip maxima - nutná podmínka řešení problémů dynamické optimalizace.

Souvislost dynamického programování a variačních metod

Základní variační úloha - hledáme minimum funkcionálu

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1$$

Řešení dynamickým programováním - zavedeme optimální funkci $V(x, t)$

$$V(x, t) = \min_{\dot{x}} \int_t^{t_1} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

Známe-li derivaci $\dot{x}(t)$, známe i řešení $x(t)$. Derivace $\dot{x}(t)$ je jakousi "řídící veličinou".

Odvození Bellmanovy rovnice pro optimální funkci $V(x, t)$

$$V(x, t) = \min_x \left\{ \int_t^{t+\Delta t} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt + \int_{t+\Delta t}^{t_1} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt \right\}$$

Odtud

$$V(x, t) = \min_x \left\{ \int_t^{t+\Delta t} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt + V(x + \Delta x, t + \Delta t) \right\}$$

Úprava

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt &= g(x(t), \dot{x}(t), t) \Delta t + \varepsilon_1(\Delta t), \\ V(x + \Delta x, t + \Delta t) &= V(x, t) + \frac{\partial V}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + \varepsilon_2(\Delta t), \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_1(\Delta t)}{\Delta t} = 0, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_2(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

Předpokládáme existenci a omezenost druhých parciálních derivací $V(x, t)$ a existenci derivace $\dot{x}(t)$.

Bellmanova rovnice pro základní variační úlohu

$$0 = \min_x \left\{ g(x(t), \dot{x}(t), t) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} \right\}$$

Z ní plynou dvě rovnice

$$\begin{aligned} -g(x(t), \dot{x}(t), t) &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} \\ -\frac{\partial g(x(t), \dot{x}(t), t)}{\partial \dot{x}} &= \frac{\partial V}{\partial x} \end{aligned}$$

Z předchozích dvou rovnic odvodíme Eulerovu - Lagrangeovu rovnici.

Derivujeme druhou podle času

$$-\frac{d}{dt} g_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) = \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \dot{x}$$

Derivujeme parciálně podle x první rovnici

$$-g_x - g_{x\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{d\dot{x}}{dx}$$

Dosadíme z jedné do druhé

$$-g_x - g_{x\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{d}{dt} g_x + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{d\dot{x}}{dx}$$

Upravíme

$$g_x - \frac{d}{dt} g_x + \left(\frac{\partial V}{\partial x} + g_{x\dot{x}} \right) \frac{d\dot{x}}{dx} = 0$$

Výraz v závorce na levé straně předchozí rovnice je roven nule, proto je předchozí rovnice totožná s Eulerovou - Lagrangeovou rovnicí $g_x - \frac{d}{dt} g_x = 0$.

Legendrova podmínka z Bellmanovy rovnice:

Aby v Bellmanově rovnici byl výraz ve složené závorce minimální, musí být jeho druhá derivace podle $\dot{x}$ nezáporná

$$\frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^2} \left\{ g(x(t), \dot{x}(t), t) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} \right\} \geq 0$$

Odtud Legendrova podmínka

$$g_{\dot{x}\dot{x}} \geq 0,$$

neboť optimální funkce nezávisí na $\dot{x}$.

Legendova podmínka nevylučuje, že minimum je pouze relativní.

Abyste minimum existovalo vůči všem funkcím $\bar{x} = \bar{x}(x, t)$, musí platit

$$g(x(t), s(t), t) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} s \leq g(x(t), z(t), t) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} z$$

kde $\bar{x} = \bar{x}(x, t)$ je optimální hodnota derivace a $\bar{z} = z(x, t)$ je libovolná jiná hodnota derivace.

Z předchozí rovnice

$$g(x(t), z(t), t) - g(x(t), s(t), t) + \frac{\partial V}{\partial x} (z - s) \geq 0$$

Odtud po dosazení

$$g(x(t), z(t), t) - g(x(t), s(t), t) - \frac{\partial g}{\partial s} (z - s) \geq 0$$

Levá strana je rovna Weierstrassově funkci $E(x, z, s, t)$ a předchozí vztah je Weierstrassova postačující podmínka.

Pro volný koncový bod $x(t_1)$ určme podmínky transversality:

Změníme-li polohu optimálního koncového bodu, pak hodnota funkcionálu $J(x(t))$ vzroste (spíše neklesne).

V optimálním koncovém bodě platí

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \Big|_{t=t_1} = 0$$

Proto v optimálním koncovém bodě

$$g(x) \Big|_{t=t_1} = 0,$$

což jsou podmínky transversality pro volný konec trajektorie a pevný koncový čas.

Dynamické programování a princip maxima

Souvislost dynamického programování a principu maxima.

Princip maxima byl vysloven jako nutná podmínka řešení úlohy optimálního řízení v roce 1956 L. S. Pontrjaginem.

Jeho odvození nevylučuje předpoklady plané pro dynamické programování (diferencovatelnost optimální funkce $V(x, t)$).

Pokud je optimální funkce diferencovatelná, ukážeme souvislost principu maxima a dynamického programování.

Problém optimálního řízení

$$\min_{u(t)} \left\{ J = h(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} g(x, u, t) dt : \dot{x}(t) = f(x, u, t), x(t_0) = x_0 \right\}$$

Tuto Bolzovu úlohu převeďme na Mayerovu úlohu a odstraníme explicitní závislost na čase.

Rozšířme stav systému o dvě složky:

Zavedeme $x_{n+1}(t) = t$, která je určena diferenciální rovnicí

$$\frac{dx_{n+1}(t)}{dt} = 1, \quad x_{n+1}(t_0) = t_0$$

Zavedeme další pomocnou proměnnou $x_0(t)$, která je rovna integrálnímu členu v kritériu optimality

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = f_0 = g(x, u, t), \quad x_0(t_0) = 0$$

a proto $x_0(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} g(x, u, t) dt$.

Minimalizační kritéria - Bolzova úloha - je tím změněna na minimalizaci koncového stavu - Mayerova úloha

$$\min_{u(t)} \{ J = h(x(t_1)) + x_0(t_1) : \dot{x}(t) = f(x, u, t), x(t_0) = x_0 \}$$

Leží-li koncový bod na křivce $x = \varphi(t)$, pak při pohybu koncového bodu po této křivce, bude změna funkcionálu $J(x, t)$ i optimální funkce $V(x, t)$ nulová.

$$\delta V(x, t) \Big|_{t=t_1, x=\varphi(t_1)} = 0$$

Proto

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \varphi'(t) = 0, \quad \text{pro } t = t_1$$

Dosadíme za $\frac{\partial V}{\partial t}$

$$-g(x, \bar{x}, t) - \frac{\partial V}{\partial x} \bar{x} + \frac{\partial V}{\partial x} \varphi = 0, \quad \text{pro } t = t_1.$$

Protože $\frac{\partial V}{\partial x} = g_x$, pak

$$g(x, \bar{x}, t) - g_x(\bar{x} - \bar{x}) = 0, \quad \text{pro } t = t_1,$$

což jsou podmínky transversality pro tento případ.

Složky x_0 a x_{n+1} připojíme ke složkám stavového vektoru x systému - dostaneme zobecněný stavový vektor $\bar{x} \in (n+2)$ -rozměrném prostoru

$$\bar{x} = [x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]^T$$

Podobně zavedeme zobecněný vektor pravých stran stavové rovnice systému a předchozích diferenciálních rovnic

$$\bar{f} = [f_0, f_1, \dots, f_n, f_{n+1}]^T$$

Optimální řízení určíme dynamickým vektorem programováním řešením Bellmanovy rovnice

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \min_{u(t)} \left(g(x, u, t) + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u, t) \right)$$

s okrajovou podmínkou $V(x, t_1) = h(x(t_1))$.

Zavedeme vektor $\bar{p}(t)$ rozměru $(n+2)$

$$\bar{p}(t) = [p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1}]^T = \left[-1, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}, \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}} \right]^T$$

Vektor $\bar{p}(t)$ se nazývá konjugovaný vektor.

Jeho složky jsou rovny zápornému gradientu optimální funkce $V(\bar{x}, t)$.

Bellmanovu rovnici upravíme tak, abychom mohli dosadit zobecněné vektory $\bar{x}$, $\bar{p}$ a funkci $\bar{f}$

$$0 = \min_{u(t)} \left(g(x, u, t) + \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n + \frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

Minimalizaci zaměníme na maximalizaci jeho negace

$$0 = \max_{u(t)} \left(-(1)g(x, u, t) - \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 - \dots - \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n - \frac{\partial V}{\partial t_{n+1}} (-1) \right)$$

Dosažením $\bar{p}$ a $\bar{f}$ dostaneme

$$0 = \max_{u(t) \in U} (\bar{f}^T \bar{p}) = \max_{u(t) \in U} \sum_{i=0}^{n+1} f_i p_i$$

Zavedeme skalární Hamiltonovu funkci

$$\bar{H}(\bar{x}, \bar{p}, u) = \bar{f}^T \bar{p} = \sum_{i=0}^{n+1} f_i p_i$$

dostaneme Pontrjaginův princip maxima

$$0 = \max_{u(t) \in U} \bar{H}(\bar{x}, \bar{p}, u)$$

Pontrjaginův princip maxima vyžaduje, aby při optimálním řízení $u^*(t)$ byla Hamiltonova funkce $\bar{H}(\bar{x}, \bar{p}, u)$ v každém časovém okamžiku t maximální vůči řízení $u(t)$.

Algoritmus nalezení optimálního řízení je tedy v principu dosti jednoduchý.

Optimální řízení $u^*(t)$ je takové řízení, které maximalizuje Hamiltonián.

Navíc platí, že Hamiltonián je při optimálním řízení konstantní a je roven nule.

Jednoduchou aplikací principu maxima znemožňuje to, že neznáme optimální funkci $V(x, t)$, ani její gradienty.

Odvodíme diferenciální rovnici pro výpočet konjugovaného vektoru $\bar{p}$.

Vektor $\bar{p} = \bar{p}(\bar{x}(t))$ závisí na zobecněném stavu $\bar{x}$, který je funkcí času.

Hledíme vztah pro derivaci vektoru $\bar{p}$ podle času.

$$\frac{d\bar{p}_i}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial x_i} \right) = -\sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial x_i} \right) \frac{dx_j}{dt} = -\sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x_i \partial x_j} \bar{f}_j,$$

pro $i = 1, \dots, (n+1)$.

Souřadnice $\bar{p}_0 = (-1)$ a proto $\frac{d\bar{p}_0}{dt} = 0$.

Podle principu maxima optimální řízení $u^*(t)$ v každém okamžiku maximalizuje Hamiltonián.

Jsem-li v čase t ve stavu $\bar{x}$, je principem maxima určeno optimální řízení.

Změníme-li v čase t stav $\bar{x}$, řízení $u^*(t)$ již nebude optimální pro změněný stav.

Principem maxima můžeme spočítat jinou hodnotu optimálního řízení.

Z této úvahy plyne, že derivace Hamiltonovy funkce $\bar{H}$ podle $\bar{x}$ jsou na optimální trajektorii nulové.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \bar{H}(\bar{x}, \bar{p}(\bar{x}), u^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, (n+1)$$

Zde je Hamiltonián chápán jako funkce $\bar{H}(\bar{x}, \bar{p}(\bar{x}), u^*) = \bar{H}(\bar{x}, u^*)$.

Po dosažení za Hamiltonovu funkci $\bar{H}$ dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x_j} \bar{f}_j \right) = -\sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x_i \partial x_j} \bar{f}_j - \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, (n+1)$$

Zavedeme rozšířenou optimální funkci

$$\bar{V}(\bar{x}) = x_0 + V(x, t) = x_0 + V(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$$

$V(n+2)$ -rozměrném prostoru $\bar{x}$ existují izoplochy $\bar{V}(\bar{x}) = \text{konst.}$.

Konjugovaný vektor $\bar{p}$ roven zápornému gradientu funkce $\bar{V}(\bar{x})$

$$\bar{p} = -\text{grad}_{\bar{x}} \bar{V}(\bar{x})$$

Vektor $\bar{f}$ je vektor stavových rychlostí $\bar{f} = \frac{d\bar{x}}{dt}$.

Princip maxima vyžaduje, aby skalární součin $\bar{p}^T \bar{f} = \bar{H}$ byl maximální, tedy aby projekce vektoru rychlosti $\bar{f}$ na vektor $\bar{p}$ byla maximální.

Tato projekce je nekladná a pro optimální řízení je nulová - vektory $\bar{p}$ a $\bar{f}$ jsou tedy, při optimálním řízení, na sebe kolmé.

Názornější představě brání to, že funkce $\bar{V}(\bar{x})$ není rovna optimální funkci $V(x, t)$.

Je o $x_0 = \int_{t_0}^t g \, dt$ větší a je definována v prostoru větší dimenze.

Zavedením vektoru $\bar{p}$ s opačným znaménkem se zřejmě maximalizace Hamiltoniánu změnil na jeho minimalizaci.

Dostaneme tedy tzv. **princip minima**, který se od principu maxima liší pouze znaménkem konjugovaného vektoru $\bar{p}$.

Používání principu minima má logiku v tom, že minimalizaci kritéria odpovídá minimalizace Hamiltoniánu.

Zde zachováváme Pontrjaginem zavedený princip maxima.

Určení optimální funkce $V(x, t)$ vyžaduje řešit Bellmanovu parciální diferenciální rovnici.

Při použití principu maxima potřebujeme znát konjugovaný vektor $\bar{p}(t)$, který však lze určit, aniž bychom počítali optimální funkci $\bar{V}(\bar{x})$ a její gradient.

Z předchozího plyne

$$-\sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x_i \partial x_j} \bar{f}_j = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, (n+1)$$

Pro konjugovaný vektor $\bar{p}$ dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{d\bar{p}_i}{dt} = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial x_i} = -\sum_{j=0}^{n+1} \bar{p}_j \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, (n+1)$$

Tato diferenciální rovnice spolu s diferenciální rovnici $\frac{d\bar{x}_0}{dt} = t$ tvoří soustavu konjugovaných rovnic určující změnu konjugovaného vektoru na optimální trajektorii - jsou to rovnice tzv. **konjugovaného systému**.

Předchozí soustavu ještě dále upravíme.

Pro $\bar{H} = \bar{H}(\bar{x}, \bar{p}, u)$, platí pro parciální derivaci $\bar{H}$ podle x_i

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=0}^{n+1} \bar{p}_j \bar{f}_j \right) = \sum_{j=0}^{n+1} \bar{p}_j \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial x_i}$$

Odtud je možno diferenciální rovnici konjugovaného systému zapsat ve tvaru

$$\frac{d\bar{p}_i}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial x_i}, \quad i = 0, 1, \dots, (n+1)$$

Věta: PRINCIP MAXIMA.

Mějme problém optimálního řízení.

Abys řízení $u^*(t) \in U$ bylo optimální řízení minimalizující kritérium kvality řízení, musí platit, že existuje nenulový vektor $\bar{p}(t)$, vyhovující diferenciální rovnici konjugovaného systému s okrajovými podmínkami určenými podmínkami traverzality.

Hamiltonova funkce je $\bar{H}(\bar{x}, \bar{p}, u) = \bar{f}^T \bar{p} = \sum_{i=1}^{n+1} f_i \cdot p_i$.

V každém časovém okamžiku t je Hamiltonova funkce maximální vzhledem k řízení $u(t)$ a její maximum je rovno nule.

Poznámky:

1. Je-li pevný koncový bod trajektorie $x(t_1)$, potom nejsou určeny koncové podmínky konjugovaného systému. Místo nich známe koncové podmínky $x(t_1)$ systému.
2. Je-li řízený systém stacionární (časově invariantní) - tvořící funkce f není explicitně závislá na čase; a také funkce g v kritériu nezávisí explicitně na čase, není třeba zavádět novou souřadnici x_{n+1} . Optimalizační problém řešíme pouze v $(n+1)$ -rozměrném prostoru stavů $\bar{x}$ i $(n+1)$ -rozměrném prostoru konjugovaných stavů $\bar{p}$.
3. Pro problém časově optimálního řízení, ve kterém je kritérium

$$J = \int_{t_0}^{t_1} 1(t) dt = t_1 - t_0,$$

je jádro funkcionálu $g(x, u, t) = 1$ a proto není ani třeba zavádět nultou souřadnici $x_0(t)$.

Pro stacionární systém optimalizační problém řešíme potom pouze v n -rozměrném prostoru stavů $x(t)$ a n -rozměrném prostoru konjugovaných stavů $p(t)$ (průhy nad x, p i H můžeme tedy vynechat).

Nutná podmínka optimality - princip maxima

Odvodíme princip maxima jako nutnou podmínku pro optimální řízení.

Nebudeme vycházet z Bellmanovy rovnice dynamického programování.

Uvažujme optimalizační problém s volným koncem a pevným koncovým časem

$$\min_{u(t)} \left\{ J = \int_{t_0}^{t_1} g(x, u, t) dt : \dot{x}(t) = f(x, u, t), x(t_0) = x_0 \right\}$$

Optimalizační problém řešíme v $(n+2)$ rozměrném prostoru.

Vynecháme průhy nad $(n+2)$ rozměrným vektorem x i p .

Rozšířený systém je popsán rovnicí

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad x = [x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]^T$$

Minimalizujeme kritérium

$$J(u) = x_0(t_1).$$

O funkci f v rozšířené rovnici systému předpokládáme, že je ohraničená a spojitá vzhledem ke svým argumentům a diferenciálně podle x .

Řízení $u(t) \in U$ nechť je po částech spojitá funkce s konečným počtem nespojitostí prvního druhu.

Pro přehlednost odvození předpokládáme jedinou řídicí veličinu.

Princip maxima vede na podmínkové rovnice

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}} \right)^T \\ u^*(t) &= \arg \max_{u \in U} \bar{H}(\bar{x}, \bar{p}, u) \\ \frac{d\bar{p}}{dt} &= - \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{x}} \right)^T \end{aligned}$$

První rovnice v předchozí soustavě je stavová rovnice systému, neboť $\bar{H} = \bar{p}^T \bar{f}$.

Druhá rovnice je Pontriaginův princip maxima a třetí rovnice je stavová rovnice konjugovaného systému.

Z okrajové podmínky $V(x, t_1) = h(x(t_1))$ Bellmanovy rovnice plynou koncové podmínky diferenciální rovnice konjugovaného systému

$$\bar{p}_0(t_1) = -1, \quad \bar{p}_{n+1}(t_1) = 0, \quad \bar{p}_i(t_1) = -\frac{\partial h(x(t_1))}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Koncová podmínka platí pro problém optimálního řízení s volným koncovým stavem a pevným koncovým časem t_1 .

Počáteční podmínky systému jsou

$$x_0(t_0) = 0, \quad x_{n+1}(t_0) = t_0, \quad x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Předpoklad o diferencovatelnosti funkce $V(x, t)$, který provázal naše odvození, není obecně nutný.

4. Hamiltonovu funkci můžeme definovat

$$H = \sum_{i=1}^n p_i f_i - g.$$

Pro stacionární systém i kritérium můžeme potom optimalizační problém řešit v n -rozměrném prostoru stavů systému i konjugovaného systému, neboť uměle zavedená složka $p_0(t)$ je konstantní a rovna (-1) a funkce $x_0(t)$ se v Hamiltoniánu explicitně nevyskytuje.

5. Protože neznáme počáteční podmínky konjugovaného systému, je třeba řešit okrajovou úlohu pro systém diferenciálních rovnic.

Princip maxima převádí tedy problém optimalizace dynamických systémů na maximalizaci skalární Hamiltonovy funkce a okrajovou úlohu pro soustavu diferenciálních rovnic, které popisují dynamické vlastnosti daného systému a tzv. konjugovaného systému.

6. V kapitole o variačních metodách byl uveden kanonický tvar Eulerovy - Lagrangeovy rovnice.

Tam se také vyskytovala Hamiltonova funkce H a konjugovaný vektor (který tam byl značen λ). Tam jsme požadovali, aby na optimální trajektorii (extremále) platilo $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$. To platí v případě, že řízení $u(t)$ není omezeno.

Požadavek nulovosti derivace Hamiltoniánu vůči řízení nahrazuje princip maxima požadavkem maximalizace Hamiltonovy funkce vzhledem k řízení. Při tom řízení může být omezeno.

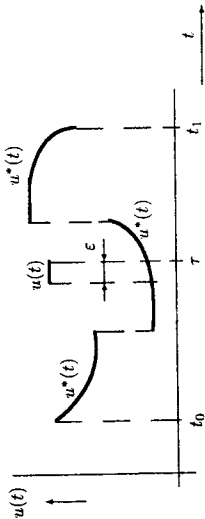
7. Je-li systém lineární vůči řízení $u(t)$ a v kritériu kvality řízení je jádro funkcionálu $g(x, u, t)$ také lineární vůči řízení $u(t)$, je i Hamiltonián $H(x, p, u)$ lineární vůči řízení $u(t)$.

Maximum lineární formy nastává vždy na hranici oblasti dovolených hodnot řízení U . Je-li tedy omezena maximální i minimální hodnota složek řídicího vektoru, pak optimální řízení nabývá pouze maximální nebo minimální hodnotou - říkáme, že optimální řízení je typu "bang - bang". Okamžiky změny hodnot řídicích veličin z jedné krajní hodnoty na druhou nazýváme "okamžiky přepnutí".

Mýlenka odvození:
Předpokládáme, že jsme našli optimální řízení $u^*(t)$ i optimální trajektorii $x^*(t)$. Porušíme-li nějakým způsobem optimální řízení $u^*(t)$, kritérium se ze své minimální hodnoty může jenom zvětšit (lépe - nemůže se zmenšit). Nezápornost přírůstku kritéria, při změně řízení od optimální hodnoty, nás povede k principu maxima.

Porušení optimálního řízení provedeme speciálním způsobem.
Na nekonečně malém časovém intervalu $\tau - \epsilon < t < \tau$, kde ϵ je nekonečně malá veličina a libovolný časový okamžik τ , $t_0 < \tau \leq t_1$, dopustíme libovolně velkou (ale přípustnou) změnu řízení $u(t)$ od optimálního průběhu $u^*(t)$. Na ostatním intervalu $t \in [t_0, \tau - \epsilon]$ a $t \in [\tau, t_1]$ zůstane řízení optimální.

Toto změně optimálního řízení říkáme "jehlová variace" - viz obr.



Obrázek 23: Jehlová variace optimálního řízení $u^*(t)$.

Výšešíme vliv této jehlové variace na trajektorii a kritérium.
Rozdíl mezi optimální trajektorií $x^*(t)$ a trajektorií $x(t)$, odpovídající neoptimálnímu řízení $u(t)$, bude v čase τ úměrný ϵ a

s přesností na nekonečně malé veličiny druhého řádu platí

$$x(\tau) - x^*(\tau) = \epsilon \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx^*}{dt} \right)_{t=\tau} = \epsilon [f(x(\tau), u(\tau)) - f(x^*(\tau), u^*(\tau))]$$

Předchozí vztah je pro odvození principu maxima klíčový.
Pro $t \geq \tau$ je řízení již optimální, ale vlivem jehlové změny řízení je variace trajektorie $\delta x(t) = x(t) - x^*(t)$ nenulová i pro čas t , kde $\tau \leq t \leq t_1$.

Nalezneme linearizovaný vztah pro variaci $\delta x(t)$.

Z rovnice systému $\dot{x}(t) = f(x, u)$ dostaneme pro přírůstek δx

$$\frac{d(x + \delta x)}{dt} = f(x + \delta x, u) = f(x, u) + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \epsilon(\delta x),$$

kde $\epsilon(\delta x)$ je nekonečně malá veličina alespoň druhého řádu.

Odtud plyne lineární rovnice pro přírůstek δx

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x, \quad \text{a po složkách} \quad \frac{d(\delta x_i)}{dt} = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta x_j, \quad i = 0, 1, \dots, (n+1).$$

Počáteční podmínky jsou $\delta x(\tau) = \epsilon [f(x(\tau), u(\tau)) - f(x^*(\tau), u^*(\tau))]$

Variace kritéria je

$$\delta J(u^*) = \delta x_0(t_1) \geq 0$$

Variace je nezáporná, protože optimální řízení $u^*(t)$ zajišťuje minimální hodnotu kritéria.

Při neoptimálním řízení $u(t)$ (s jehlovou variací) nemůže hodnota kritéria klesnout.

Nyní zbývá nalézt diferenciální rovnici pro vektor $p(t)$.
Z předchozího vztahu plyne $\delta x^T(t)p(t) = \text{konst.}$ pro $\tau \leq t \leq t_1$. Odtud

$$\frac{d}{dt} (\delta x^T(t)p(t)) = 0, \quad \tau \leq t \leq t_1$$

Provedeme derivaci skalárního součinu

$$\left(\frac{d(\delta x(t))}{dt} \right)^T p(t) + \delta x^T(t) \frac{dp(t)}{dt} = 0, \quad \tau \leq t \leq t_1.$$

Předchozí rovnici vyjádříme po složkách

$$\sum_{i=0}^{n+1} \frac{d(\delta x_i(t))}{dt} p_i(t) + \sum_{j=0}^{n+1} \delta x_j(t) \frac{dp_j(t)}{dt} = 0, \quad \tau \leq t \leq t_1.$$

Do předchozího výrazu dosadíme diferenciální rovnici pro přírůstek $\delta x_i(t)$

$$\sum_{i=0}^{n+1} p_i(t) \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta x_j(t) + \sum_{j=0}^{n+1} \delta x_j(t) \frac{dp_j(t)}{dt} = 0.$$

Vytkneme variaci δx_j z obou členů předchozí rovnice

$$\sum_{j=0}^{n+1} \delta x_j(t) \left[\frac{dp_j(t)}{dt} + \sum_{i=0}^{n+1} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} p_i(t) \right] = 0.$$

Protože variace $\delta x_j(t)$ je obecně nenulová, musí být výraz v hranaté závorce roven nule.

ŘEŠENÍ NĚKTERÝCH PROBLÉMŮ OPTIMÁLNÍHO ŘÍZENÍ

PRINCIPEM MAXIMA

Obecný postup řešení

Podle principu maxima optimální řízení optimalizuje Hamiltonián. Přitom je třeba řešit diferenciální rovnici systému a tzv. konjugovaného systému. Počáteční podmínky systému obvykle známe, ale neznáme počáteční podmínky konjugovaného systému. V úloze s volným koncem trajektorie známe koncovou podmínku konjugovaného systému v úloze s pevným koncem trajektorie známe naopak koncovou podmínku systému. Ideově schéma řešení problému optimálního řízení s pevným koncem trajektorie je uvedeno na obr.

Optimální postup hledání počáteční podmínky $p(t_0)$ konjugovaného systému optimalizátorem O_2 není obecně známý. Přitom je optimální trajektorie velmi citlivá na volbu počáteční podmínky $p(t_0)$ konjugovaného systému. Konvergence iterálního postupu hledání $p(t_0)$ je zaručena pouze pro některé speciální třídy problémů optimalizace - například pro časově optimální řízení lineárního systému, nebo kvadraticky optimální řízení lineárního systému.

Jiný způsob iterálního výpočtu optimálního řízení podle principu maxima:

Mějme problém optimálního řízení s volným koncem trajektorie a pevným koncovým časem. Označme $u^{(i)}(t)$ i -tou iteraci výpočtu optimálního řízení. Zvolíme první odhad optimálního řízení $u^{(1)}(t)$ a vypočítáme trajektorii systému vycházející z dané počáteční podmínky $x(t_0)$. Pro zvolené řízení $u^{(1)}(t)$ a odpovídající řešení $x(t)$ vypočítáme řešení diferenciální rovnice konjugovaného systému v obráceném čase vycházející z koncové podmínky $p(t_1) = 0$ (volný konec trajektorie). Z výrazu pro Hamiltonovu funkci $H = \sum_{i=1}^n p_i f_i(x, u) - g(x, u)$, můžeme vypočíst derivaci Hamiltonovy funkce $\text{grad}_p H = (\frac{\partial H}{\partial p})^T$. Uvnitř dovolené oblasti řízení je gradient kritéria vzhledem k řízení úměrný záporně vzatému gradientu Hamiltoniánu vůči řízení.

Toto tvrzení snadno prokážeme, neboť platí $\delta_u J = -\delta x^T(t) p(t)$ a proto

$$\begin{aligned} \delta_u J &= \frac{\partial J}{\partial u} \delta u = -\delta x^T(t) p(t) = - (x - x^*)^T p \\ &= -\varepsilon (f(x, u) - f(x^*, u^*))^T p = -\varepsilon [H(x, u, p) - H(x^*, u^*, p)] = -\varepsilon \delta H = -\varepsilon \frac{\partial H}{\partial u} \delta u \end{aligned}$$

Odtud plyne diferenciální rovnice pro konjugovaný vektor $p(t)$

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = - \sum_{i=0}^{n+1} \frac{\partial f_i(x, u)}{\partial x_j} p_i(t), \quad j = 0, 1, \dots, (n+1)$$

Předchozí vztah je diferenciální rovnice tzv. konjugovaného systému, která je shodná s rovnicí odvozenou v předchozím odstavci.

Přírůstek kritéria δJ můžeme vyšetřovat okamžitě v čase τ . Platí tedy

$$-\delta J = \delta x^T(\tau) p(\tau) \leq 0$$

Variace $\delta x(\tau)$ je úměrná rozdílu rychlostí a proto

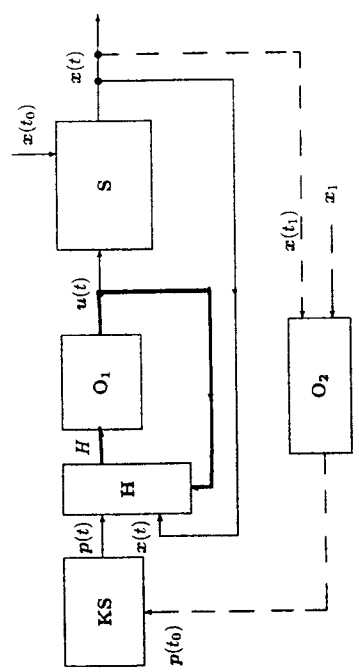
$$\varepsilon [f(x(\tau), u(\tau))]^T p(\tau) - [f(x^*(\tau), u^*(\tau))]^T p(\tau) \leq 0.$$

Definujeme si Hamiltonovu funkci $H(x, p, u)$

$$H(x, p, u) = [f(x(\tau), u(\tau))]^T p(\tau),$$

pak je zřejmé, že při optimálním řízení je na optimální trajektorii Hamiltonova funkce maximální.

Odvodili jsme princip maxima jako nutnou podmínku řešení problému optimálního řízení spojitého systému s omezením řízení.



S - řízený systém, KS - konjugovaný systém, blok H - vyvádí Hamiltonovu funkci H . Optimizátor O_1 určuje optimální řídicí veličinu tak, aby Hamiltonián byl v každém časovém okamžiku maximální vzhledem k přípustnému řízení $u(t) \in U$. Optimizátor O_1 musí být velmi rychlý.

Často lze optimální řízení z tvaru Hamiltoniánu a omezení $u(t) \in U$ analyticky vypočítat.

Optimizátor O_2 určuje počáteční podmínku konjugovaného systému.

V koncovém čase t_1 skutečnou hodnotu stavu $x(t_1)$ systému S porovnáme s požadovaným koncovým stavem x_1 . Není-li skutečný koncový stav $x(t_1)$ totožný s požadovaným koncovým stavem x_1 , změníme optimalizátorem O_2 počáteční podmínku $p(t_0)$ konjugovaného systému a v následující iteraci počítáme znovu optimální řízení a optimální trajektorii.

Proto platí

$$\text{grad}_u J = -\text{grad}_u H.$$

Nový odhad optimálního řízení $u^{(i+1)}(t)$ dostaneme podle iteračního předpisu

$$u^{(i+1)}(t) = \begin{cases} u^{(i)}(t) + \alpha \text{grad}_u H & \text{pro } u^{(i)}(t) + \alpha \text{grad}_u H \in U \\ u^{(i)}(t) & \text{pro } u^{(i)}(t) + \alpha \text{grad}_u H \notin U \end{cases}$$

kde α je vhodně volený koeficient.

Jeho volba je vlastně algoritmus jednorozměrného hledání.

Můžeme použít libovolný algoritmus, případně použít i jinou metodu - například metodu konjugovaných gradientů.

Optimální řízení je určeno limitou

$$u^*(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} u^{(i)}(t).$$

Výhodou této přímé metody výpočtu optimálního řízení je, že v každé iteraci máme přípustné řešení. Iterační výpočet ukončíme, je-li gradient Hamiltoniánu malý, případně se řízení již nemění.

V reálných problémech optimalizace existují i omezení na stavy systému $x(t) \in X \subset R^n$.

Tyto problémy se principem maxima řeší obtížně. lze je iterace řešit pomocí pokusových či banterových funkcí zahrnutých v kritériu optimality.

Časově optimální řízení

Pro lineární stacionární systém $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ hledáme řízení $u(t) \in U$, aby doba přechodu z daného počátečního stavu $x(t_0) = x_0$ do daného koncového stavu $x(t_1) = x_1$ byla minimální.

Kritériem je tedy doba přechodu

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_1} 1(t) dt = t_1 - t_0$$

Řízení $u(t)$ je omezeno v každé složce a platí $(U_i)_{\min} \leq u_i(t) \leq (U_i)_{\max}$.

Zavedeme Hamiltonovu funkci

$$H(x, p, u) = (Ax + Bu)^T p - 1$$

Konstanta (-1) je v Hamiltoniánu proto, že v kritériu je $g = 1$ a $p_0(t) = -1$.

Hamiltonián je lineární vzhledem k řízení $u(t)$ a proto optimální řízení leží na hranici oblasti.

Maximum Hamiltoniánu nastane, bude-li maximální výraz

$$(Bu)^T p = u^T B^T p = p^T Bu = (B^T p)^T u$$

Odtud optimální řízení

$$u_i^*(t) = \begin{cases} (U_i)_{\max} & \text{pro } \sum_{j=1}^n b_{ij} p_j(t) > 0 \\ (U_i)_{\min} & \text{pro } \sum_{j=1}^n b_{ij} p_j(t) < 0 \end{cases}$$

kde b_{ij} jsou prvky matice B .

Obilbená a velmi efektivní metoda, která umožňuje respektovat omezení na stavy systému, je tzv. metoda "několikanásobného nástřelu" - **multiple shooting method**.

Interval řízení se rozdělí na několik subintervalů a řeší se problém optimálního řízení na každém intervalu zvlášť.

Při tom se řídicí veličina na každém intervalu vhodně aproximuje, například po částech konstantní funkcí, nebo po částech lineární funkcí a pod..

Tím převedeme problém optimálního řízení na problém matematického programování - hledání koeficientů aproximačních funkce řízení.

Nyní musíme respektovat hlavní myšlenku metody.

Koncový stav na každém intervalu musí být přípustný a navíc musí být shodný s počátečním stavem na následujícím intervalu.

Tyto omezující podmínky tvoří omezení problému nelineárního programování.

Na jeho řešení můžeme použít libovolnou numerickou metodu nelineárního programování s omezením, na příklad metodu SQP (sekvenčního kvadratického programování) nebo metodu IPM (metodu vnitřního bodu).

Omezení na stavy respektujeme pouze v krajních bodech intervalů, na které jsme rozdělili celou dobu řízení.

Proto můžeme sledovat a vhodně omezovat i derivace stavů v krajních bodech intervalů, abychom uvnitř zvolených intervalů nepřekročili omezení.

Při řešení optimalizačního problému principem maxima může nastat případ, že Hamiltonián není závislý na řízení a tudíž určen optimálního řízení maximalizací Hamiltoniánu nelze provést.

Nastává tzv. **singulární případ**, při kterém nutné podmínky prvního řádu nedají řešení. Proto je nutno vyšetřovat podmínky druhého řádu (druhé a vyšší variace).

Pokud $\sum_{j=1}^n b_{ij} p_j(t) = 0$, není optimální řízení definováno.

Pokud je systém říditelný každou složkou řídicí veličiny, pak to nastává v izolovaných časových okamžicích, ve kterých je přepnutí řídicí veličiny z jedné krajní polohy na druhou.

Rovnice konjugovaného systému je

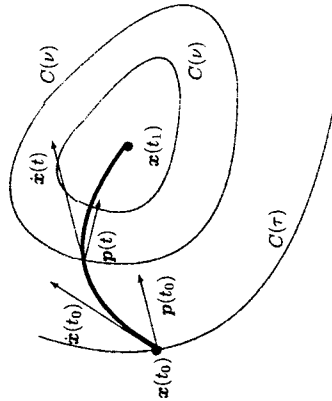
$$\frac{dp}{dt} = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T = -A^T p$$

Matice $-A^T$ konjugovaného systému má vlastní čísla $-\lambda_A$, kde λ_A jsou vlastní čísla matice systému A .

Proto, bude-li původní systém stabilní, bude konjugovaný systém nestabilní.

Ve stavovém prostoru nalezneme množinu $C(\tau)$ bodů, ze kterých se lze dostat za čas $\tau = t_1 - t_0$ do koncového stavu $x(t_1) = x_1$ přípustným řízením $u(t) \in U$.

Lze ukázat, že při optimálním řízení je počáteční stav $x(t_0)$ na hranici množiny $C(\tau)$ a počáteční vektor konjugovaného systému $p(t_0)$ je vnitřní normálový vektor množiny $C(\tau)$ - viz obr.



Obrázek 24: Množina $C(\tau)$, $\tau = t_1 - t_0$ a množiny $C(\nu)$, $\nu = t_1 - t$, ze kterých se lze za čas τ resp. ν dostat do koncového stavu přípustným řízením.

Nyní uvolíme počáteční čas - místo t_0 budeme počáteční čas značit t .

Potom množina $C(\nu)$ je množina bodů, ze kterých se lze za čas $\nu = t_1 - t$ dostat do cíle $x(t_1)$. Vektor $p(t)$ na optimální trajektorii je pro všechna t vnitřní normálový vektor hranice množiny $C(\nu)$ - viz obr.

Je to zřejmé z toho, že $p(t) = -\text{grad } V(x, t)$ a hranice množiny $C(\nu)$ je určena stavy x , pro které platí $V(x, t) = V(x) = \nu$, kde $V(x, t)$ je Bellmanova optimální funkce.

Navíc je při optimálním řízení součin skalární součinn vektoru stavové rychlosti a vektoru konjugovaného systému po celou dobu řízení konstantní a roven 1 - viz vztah pro Hamiltonián, kde $\max_u H = 0$.

Z řešení stavové rovnice konjugovaného systému

$$p(t) = e^{-A^T(t-t_0)} p(t_0)$$

a vztahu pro optimální řízení plyne:

Věta o konečném počtu přepnutí:

Časově optimální řízení $u^*(t)$ lineárního spojitého systému je po částech konstantní s konečným počtem nespojitostí prvního druhu nastávajících v okamžicích přepnutí.

Věta o n intervalech:

Má-li matice systému A pouze reálná vlastní čísla, je počet přepnutí nejvýše roven $(n - 1)$, kde n je řád řízeného systému. Každá složka optimálního řídicí veličiny $u_i^*(t)$ má nejvýše n intervalů, na kterých má konstantní hodnotu (počet přepnutí je nejvýše $(n - 1)$).