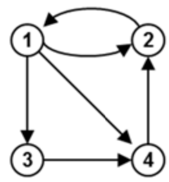
A **Jméno** ______________________________

**V následujících otázkách je pouze správná odpověď hodnocena uvedeným počtem bodů. Částečná nebo nepřesná odpověď je hodnocena 0 body. Než odpověď vepíšete do archu, dobře si ji rozmyslete a připravte nanečisto na jiném papíru.**

**1. ( b.)**

1 .. 3
2 .. 3
3 .. 1
4 .. 2

Zkoumaná archeologická naleziště a způsob, jakým jsou propojena, lze znázornit uvedeným orientovaným grafem. V i-tém uzlu grafu se nalézá tým $T_i$, v němž je $p_i$ archeologů. V daném čase T se každý tým $T_i$ rozdělí na tolik přesně stejně velkých skupin, kolik je výstupní stupeň uzlu i, každá skupina zvolí jednu výstupní hranu a po ní přejde do sousedního uzlu, kde skončí v čase T+1. Po tomto přesunu bude v každém uzlu přesně stejný počet archeologů jako před časem T. Určete, jaký je minimální počet archeologů na každém nalezišti, který umožňuje přesun s těmito vlastnostmi.




**2. ( b.)**

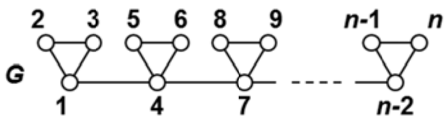
Více variant

Je dána abeceda A = {a,b,c,d,e,f} a množina M slov nad A, M = {aba, abbb, acde, acdf, abbd, acddf }.
Nakreslete přechodový diagram slovníkového automatu pro množinu M, který lze použít pro hledání v textu nad A libovolného slova množiny M. Váš automat může být deterministický i nedeterministický.

**3. ( b.)**

$2 \cdot 2^{n/3}$

Je dán graf G = (V, E). Automorfizmus grafu G je takové prosté zobrazení $f$ z V na V (bijekce), pro které platí $\forall(u, v) \in V \times V$: $(u, v) \in E \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E$.
Určete počet automorfizmů grafu G na obrázku, pro $n > 3$.




Každý "pantograf " skládající se ze tří uzlů $\{i, i+1, i+2\}$, kde $i = 1, 4, 7, \ldots n-2$, může být natočen v pořadí $(i, i+1, i+2)$ jako na obrázku nebo v pořadí $(i, i+2, i+1)$. Protože "pantografů" je $n/3$, je celkový počet možných konfigurací roven $2^{n/3}$**.** Navíc může graf být zrcadlen podle vertikální osy (uzly se na sebe zobrazují $1 \leftrightarrow n-2$, $4 \leftrightarrow n-5$, atd.), čímž získáváme dvojnásobek uvedených možností.

**4. ( b.)**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Najděte LU rozklad dané matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 10 & 5 \\ 3 & 20 & 13 \end{pmatrix}$$

**5. ( b.)**

$\Theta(n^2 \cdot \log(n))$

Je dán graf G = (V, E). Platí $|V| = n$, $|E| \in \Theta(n \cdot \log(n))$ . Graf je reprezentován seznamem hran v náhodném pořadí. Určete asymptotickou složitost algoritmu BFS v závislosti na $n$, za předpokladu, že algoritmus při zjišťování informací o grafu využívá pouze danou reprezentaci G.

V každém otevřeném uzlu je nutno projít celý seznam hran, abychom získali všechny sousedy aktuálního uzlu. V každém uzlu tak strávíme čas uměrný počtu hran. Při $n$ uzlech to bude $n \cdot \Theta(n \cdot \log(n)) = \Theta(n^2 \cdot \log(n))$

**6. ( b.)**

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -0.2 \\ 0.2 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Afinní transformace $T(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2$ , je složena ze tří zobrazení $T(\boldsymbol{x}) = f_1(f_2(f_3(\boldsymbol{x})))$. Zobrazení $f_1$ je kontrakce s faktorem 0.2, zobrazení $f_2$ je posunutí o jednotku doprava a zobrazení $f_3$ je rotace o 90° v kladném smyslu (proti směru hod.

A

**Jméno** ______________________________

ručiček)
Napište T($\boldsymbol{x}$) ve tvaru T($\boldsymbol{x}$) = A$\boldsymbol{x}$ + $\boldsymbol{z}$, kde A $\in \mathbf{R}^{2\times2}$ a $\boldsymbol{z} \in \mathbf{R}^2$.

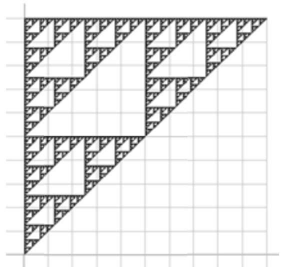
**7. (  b.)**

$T_1(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$

$T_2(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

$T_3(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

Śierpińského trojúhelník patří k nejznámějším fraktálům. Na obrázku je schématicky zachycena jedna z jeho možných podob. Je to také množina bodů v rovině, která je atraktorem iterovaného systému funkcí, který obsahuje tři afinní transformace. Určete tyto transformace. Předpokládejte, že levý dolní roh trojúhelníka leží v bodě (0, 0), levý horní roh leží v bodě (0, 1) a pravý horní roh leží v bodě (1, 1).



**8. (  b.)**

$\binom{n}{3}$

Uvažujeme permutace množiny M = {1, 2, 3, ..., $n$}. Cyklus délky $k$ v permutaci $p$ je množina A = {$a_1$, $a_2$, ..., $a_k$} $\subseteq$ M, pro kterou platí:
$1 \le a_1 < a_2 < ... < a_k \le n$,
$p(a_j) = a_{j+1}$ pro $1 \le j < k$, $p(a_k) = a_1$.

Určete, kolik je takových permutací množiny {1, 2, 3, ..., $n$}, které obsahují právě dva cykly, y nichž jeden má délku 3 a druhý délku $n-3$.

Když vybereme z M právě tři čísla, označme je v rostoucím pořadí $a_1$, $a_2$, $a_3$. Tak získáme právě jeden cyklus. Tudíž počet cyklů je roven počtu způsobů, jimiž lze z $n$-prvkové množiny vybrat tři prvky, což je vyjádřeno kombinačním číslem neboli binomickým koeficientem $\binom{n}{3}$ .

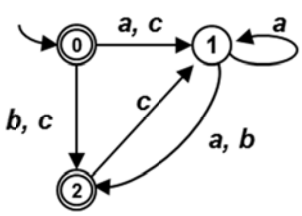
**9. (  b.)**

Více variant

Nakreslete přechodový diagram automatu, kterým lze v textu nad abecedou {$a$, $b$, $c$} vyhledávat všechny podřetězce, které mají od slova $cc$ Levenshteinovu vzdálenost rovnou nejvýše 1.

**10. (  b.)**

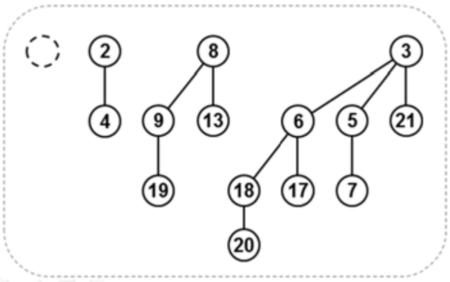
Převeďte daný NKA na DKA a napište jeho přechodovou tabulku.

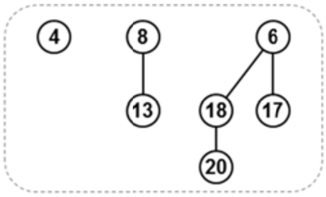


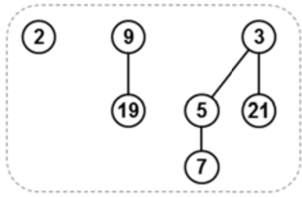

**11. (  b.)**
Když spojíme pomocí operace Merge dvě binomiální haldy na obrázku získáme jedinou výslednou binomiální haldu. Nakreslete ji.

A **Jméno** ______________________________

Více variant, např



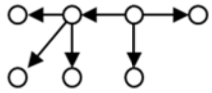




**12. (  b.)**

180

Napište. kolika způsoby lze topologicky uspořádat graf daný na obrázku.



V topologickém uspořádání může být uzel $b$ pouze na 2. nebo 3. nebo 4. místě (zdůvodněte, proč).
Když je na 2. místě, množina uzlů $\{c, d, e\}$ může zabírat právě $\binom{5}{3}$ míst ze zbývajících míst 3. - 7., přičemž se na těchto místech může vyskytovat v libovolné ze svých 6 permutací. K tomu ještě uzly $f$, $g$ mohou být ve dvou možných pořadích. Celkem máme $\binom{5}{3} \cdot 6 \cdot 2 = 120$ možností.
Když je uzel $b$ na 3. místě, zcela analogickou úvahou získáváme počet $\binom{4}{3} \cdot 6 \cdot 2 = 48$ možností.
Když je uzel $b$ na 4. místě, obdobně dostaneme $\binom{3}{3} \cdot 6 \cdot 2 = 12$ možností. Dohromady sečteno je to 180.

**13. (  b.)**

$\Theta(n^2 \cdot \log n)$

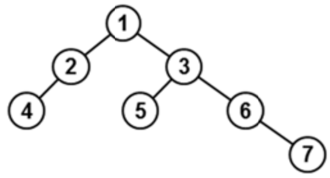
Když má daný graf $n$ uzlů a $\Theta(n^2)$ hran, potom asymptotická složitost rekurzivního algoritmu DFS (prohledávání do hloubky) je $\Theta(n^2)$, za předpokladu, že během provádění algoritmu máme přístup v konstantním čase ke každému právě zpracovávanému uzlu a ke každé právě zpracovávané hraně. Určete co nejpřesněji, jaká bude asymptotická složitost rekurzivního DFS, pokud doba přístupu ke každému uzlu bude bude konstantní a doba přístupu ke každé hraně bude ve třídě $\Theta(\log(n^2))$.

Během DFS otevřeme a zavřeme každý uzel $v$ právě jednou, což představuje celkem $\Theta(1)$ operací. Dále musíme vykoušet každou hranu vedoucí dále z uzlu $v$. Těchto hran je $\Theta(n)$, čili na probírání hran k sousedním uzlům uzlu $v$ potřebujeme $\Theta(n \cdot \log n)$ operací. Na konci těchto hran potřebujene zkontrolovat sousedy uzlu $v$, jichž je celkem $\Theta(n)$, čili na to padne $\Theta(n)$ operací. Celkem v uzlu $v$ strávíme čas úměrný $\Theta(1) + \Theta(n \cdot \log n) + \Theta(n) = \Theta(n \cdot \log n)$ operacím. Protože uzlů je $\Theta(n)$, je celková složitost $\Theta(n^2 \cdot \log n)$ .

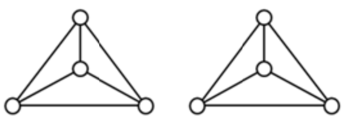
**14. (  b.)**

červené 3 4 7.

Určete všechny možnosti, jak mohou být uzly daného stromu obarveny červenou a černou barvou, aby vznikl RB-strom.



**15. (  b.)**



Najděte a nakreslete co nejmenší nesouvislý neorientovaný graf, jehož matice incidence $I$ obsahuje v každém řádku právě tři jedničky.