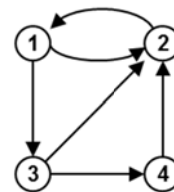


V následujících otázkách je pouze správná odpověď hodnocena uvedeným počtem bodů. Částečná nebo nepřesná odpověď je hodnocena 0 body. Než odpověď vepíšete do archu, dobře si ji rozmyslete a připravte nanečisto na jiném papíru.

1. (b.)

1 .. 4
2 .. 4
3 .. 2
4 .. 1

Zkoumaná archeologická naleziště a způsob, jakým jsou propojena, lze znázornit uvedeným orientovaným grafem. V i -tém uzlu grafu se nalézá tým T_i , v němž je p_i archeologů. V daném čase T se každý tým T_i rozdělí na tolik přesně stejně velkých skupin, kolik je výstupní stupeň uzlu i , každá skupina zvolí jednu výstupní hranu a po ní přejde do sousedního uzlu, kde skončí v čase $T+1$. Po tomto přesunu bude v každém uzlu přesně stejný počet archeologů jako před časem T . Určete, jaký je minimální počet archeologů na každém nalezišti, který umožňuje přesun s těmito vlastnostmi.



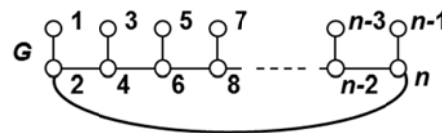
2. (b.)

Je dána abeceda $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ a množina M slov nad A , $M = \{dba, dbd, dccba, dccbb, dXf, dcYcb\}$. Nakreslete přechodový diagram slovníkového automatu pro množinu M , který lze použít pro hledání v textu nad A libovolného slova množiny M . Váš automat může být deterministický i nedeterministický.

3. (b.)

$2n$

Je dán graf $G = (V, E)$. Automorfizmus grafu G je takové prosté zobrazení $f: V \rightarrow V$ (bijekce), pro které platí $\forall (u, v) \in V \times V: (u, v) \in E \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E$. Určete počet automorfizmů grafu G na obrázku, pro $n > 4$.



Kružnici $(2, 4, 6, 8, \dots, n)$ i s navěšenými uzly stupně 1 lze "potočit" o $0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ uzlů v jednom směru (otáčení v opačném směru nepřinese nic nového, zdůvodněte), což poskytuje právě n automorfizmů (včetně identity). Celou kružnici lze navíc nejprve zrcadlit podle vertikální osy (uzly se na sebe zobrazují $2 \leftrightarrow n, 4 \leftrightarrow n-2$, atd.), čímž získáváme dvojnásobek uvedených možností.

4. (b.)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Najděte LU rozklad dané matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ 4 & 16 & 12 \end{pmatrix}$$

5. (b.)

$\Theta(n^2 \cdot \sqrt{n})$

Je dán graf $G = (V, E)$. Platí $|V| = n, |E| \in \Theta(n \cdot \sqrt{n})$. Graf je reprezentován maticí incidence. Určete asymptotickou složitost algoritmu BFS v závislosti na n , za předpokladu, že algoritmus při zjišťování informací o grafu využívá pouze danou reprezentaci G .

V každém otevřeném uzlu je nutno projít horizontálně celou maticí incidence, abychom získali všechny sousedy aktuálního uzlu. V každém uzlu tak strávíme čas uměrný počtu hran. Při n uzlech to bude $n \cdot \Theta(n \cdot \sqrt{n}) = \Theta(n^2 \cdot \sqrt{n})$.

6. (b.)

Afinní transformace $T(x), x \in \mathbf{R}^2$, je složena ze tří zobrazení $T(x) = f_1(f_2(f_3(x)))$.

Zobrazení f_1 je rotace o 90° v záporném smyslu (po směru hod. ručiček), zobrazení f_2 je posunutí o jednotku v kladném směru osy y a zobrazení f_3 je

$$T(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 \\ -0.4 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

kontrakce s faktorem 0.4.

Napište $T(x)$ ve tvaru $T(x) = Ax + z$, kde $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ a $z \in \mathbb{R}^2$.

7. (b.)

$$T_1(x) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

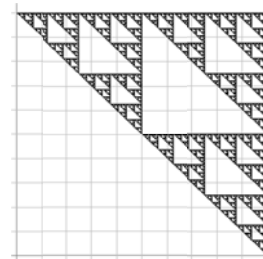
$$T_2(x) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$T_3(x) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Šierpiňského trojúhelník patří k nejznámějším fraktálům.

Na obrázku je schématicky zachycena jedna z jeho možných podob. Je to také množina bodů v rovině, která je atraktorem iterovaného systému funkcí, který obsahuje tři afinní transformace. Určete tyto transformace.

Předpokládejte, že levý horní roh trojúhelníka leží v bodě $(0, 1)$, pravý horní roh leží v bodě $(1, 1)$ a pravý dolní roh leží v bodě $(1, 0)$.



8. (b.)

$$\binom{n}{4}$$

Uvažujeme permutace množiny $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Cyklus délky k v permutaci p je množina $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq M$, pro kterou platí:

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n,$$

$$p(a_j) = a_{j+1} \text{ pro } 1 \leq j < k, \quad p(a_k) = a_1.$$

Určete, kolik je takových permutací množiny $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, které obsahují právě dva cykly, z nichž jeden má délku 4 a druhý délku $n-4$.

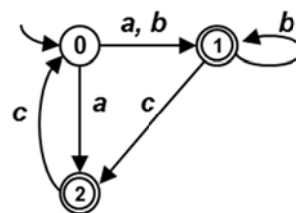
Když vybereme z M právě čtyři čísla, označme je v rostoucím pořadí a_1, a_2, a_3, a_4 . Tak získáme právě jeden cyklus. Tudíž počet cyklů je roven počtu způsobů, jimiž lze z n -prvkové množiny vybrat čtyři prvky, což je vyjádřeno kombinačním číslem neboli binomickým koeficientem $\binom{n}{4}$.

9. (b.)

Nakreslete přechodový diagram automatu, kterým lze v textu nad abecedou $\{a, b, c\}$ vyhledávat všechny podřetězce, které mají od slova cc Levenshteinovu vzdálenost rovnou nejvýše 1.

10. (b.)

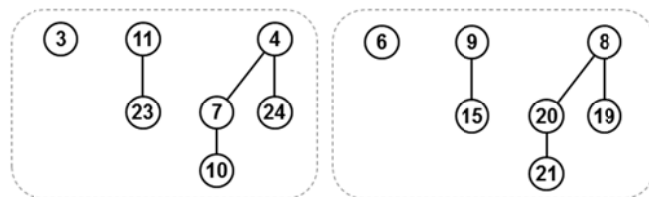
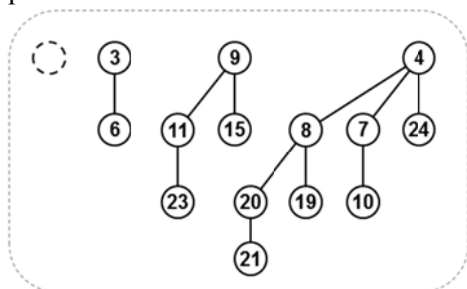
Převeďte daný NKA na DKA a napište jeho přechodovou tabulku.



11. (b.)

Když spojíme pomocí operace Merge dvě binomiální haldy na obrázku získáme jedinou výslednou binomiální haldy. Nakreslete ji.

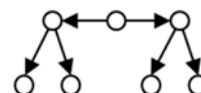
Více možností, např.



12. (b.)

80

Napište, kolika způsoby lze topologicky uspořádat graf daný na obrázku.



Uzel a musí být povinně v uspořádání na prvním místě. Množina uzlů $\{b, d, e\}$ může ležet na kterékoli trojici zbylých míst, přičemž tam může být právě ve dvou pořadích: (b, d, e) nebo (b, e, d) . To je celkem $\binom{6}{3} \cdot 2 = 40$ možností. Polohou množiny $\{b, d, e\}$ je jednoznačně dána i poloha množiny zbývajících uzlů $\{c, f, g\}$, a ta se na svých místech může vyskytovat jen v pořadí (c, f, g) nebo (c, g, f) . Počet všech možností je tedy nutno už jen zdvojnásobit, $40 \cdot 2 = 80$.

13. (b.)

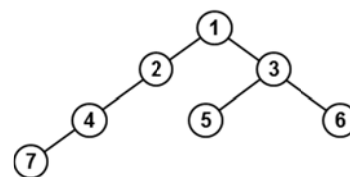
$\Theta(n^4)$

Když má daný graf n uzlů a $\Theta(n^2)$ hran, potom asymptotická složitost rekurzivního algoritmu DFS (prohledávání do hloubky) je $\Theta(n^2)$, za předpokladu, že během provádění algoritmu máme přístup v konstantním čase ke každému právě zpracovávanému uzlu a ke každé právě zpracovávané hraně. Určete, jaká bude asymptotická složitost rekurzivního DFS, pokud doba přístupu ke každému uzlu bude ve třídě $\Theta(n)$ a doba přístupu ke každé hraně bude ve třídě $\Theta(n^2)$.

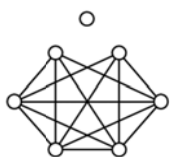
Během DFS otevřeme a zavřeme každý uzel v právě jednou, což představuje celkem $\Theta(n)$ operací. Dále musíme vykoušet každou hranu vedoucí dále z uzlu v . Těchto hran je $\Theta(n)$, čili na probírání hran k sousedním uzlům uzlu v potřebujeme $\Theta(n^3)$ operací. Na konci těchto hran potřebujeme zkontrolovat sousedy uzlu v , jichž je celkem $\Theta(n)$, čili na to padne $\Theta(n^2)$ operací. Celkem v uzlu v strávíme čas úměrný $\Theta(n) + \Theta(n^2) + \Theta(n^3) = \Theta(n^3)$ operacím. Protože uzlů je $\Theta(n)$, je celková složitost $\Theta(n^4)$.

14. (b.)

Určete všechny možnosti, jak mohou být uzly daného stromu obarveny červenou a černou barvou, aby vznikl RB-strom.



15. (b.)



Najděte a nakreslete nesouvislý neorientovaný graf s nejmenším možným počtem uzlů, jehož matice incidence I má dvakrát více sloupců než má řádků.