Toky v sítích

Zdeněk Hanzálek a Přemysl Šůcha
hanzalek@fel.cvut.cz

ČVUT FEL Katedra řídicí techniky

4. dubna 2010

1. Toky
   - Problém maximálního toku
     - Ford-Fulkersonův Algoritmus
     - Problém minimálního řezu
     - Celočíselnost
   - Rozhodovací problém přípustného toku v síti
     - Nalezení počátečního přípustného toku pro Ford-Fulkersonův alg.
   - Nejlevnější tok v síti

2. Párování
   - Maximální párování v bipartitním grafu
   - Přiřazovací úloha - Nejlevnější perfektní párování v úplném bipart. gr.
     - Maďarský algoritmus

2. Multikomoditní toky
   - Nejlevnější multikomoditní toky v síti

Síť a tok

Co je síť

Jako síť bývá označována pětice (G, l, u, s, t) kde G je orientovaný graf s hranami o horním omezení $u : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ a dolním omezení $l : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ a dvěma vrcholy s (zdroj) a t (spotřebič).

Tok

Tok v síti G je takové ohodnocení hran $f : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, kde pro každý vrchol $v \in V(G) \setminus \{s, t\}$ platí Kirchhofův zákon $\sum_{e \in \delta^-(v)} f_e = \sum_{e \in \delta^+(v)} f_e$.

Přípustný tok

Pro přípustný tok platí $f_e \in \langle l_e, u_e \rangle$.
Přípustný tok nemusí existovat, pokud $l_e > 0$.

Problém maximálního toku

Maximální tok

Je dána usp. pětice (G, l, u, s, t). Úkolem je najít takový **přípustný tok** f od zdroje ke spotřebiči, že $\sum_{e \in \delta^+(s)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(s)} f_e$ je maximální (tj. chceme transportovat co nejvíce jednotek z s do t.).

$\delta^+(s)$ je množina hran opouštějících s
$\delta^-(s)$ je množina hran vstupujících do s (ty často neuvažujeme).

Příklad - dopravní úloha: Maximální množství produktu má být dopraveno z s do t. Problém je popsán sítí (grafem) kde hrany grafu odpovídají dopravním linkám (úsekům potrubí, silnic, železnic, atd.) s příslušným horním a dolním omezením. Tok v hraně je ustálený a beze ztrát.
Reprezentujeme omezení:

- linka přepraví maximálně 10 jednotek
- linka přepraví minimálně 3 jednotky
- linka přepraví právě 20 jednotek

Př. - Rozvrhování na paralelních procesorech s preempcí

Máme n **úkolů**, které je potřeba přiřadit na m **paralelních identických strojů** (procesorů). Každá úloha má svoji **dobu trvání** p_j, **termín dostupnosti** r_j a **termíny dokončení** d_j. Při přiřazování úkolů na procesory je povoleno úkoly **přerušovat**.

Příklad pro 3 paralelní identické procesory:

úkol	T_1	T_2	T_3	T_4
p_j	1.5	1.25	2.1	3.6
r_j	3	1	3	5
d_j	5	4	7	9

Cíl

Všechny úkoly přiřadit na procesory tak, aby každý stroj vykonával v daný časový okamžik maximálně jednu úlohu a aby každá úloha byla v daný časový okamžik prováděna maximálně na jednom procesoru.

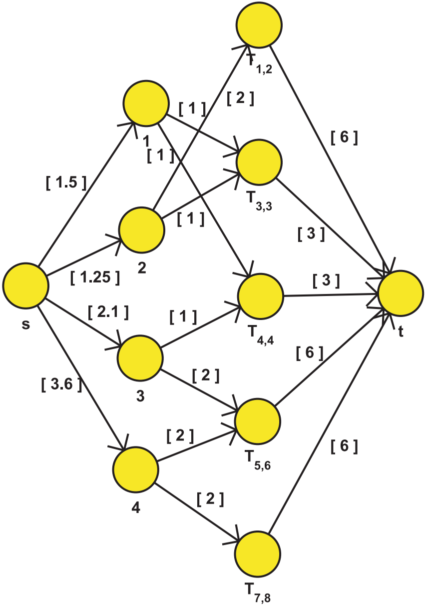
Formulujeme jako problém **maximálního toku**.

pro 3 paralelní identické procesory

úkol	1	2	3	4
p_j	1.5	1.25	2.1	3.6
r_j	3	1	3	5
d_j	5	4	7	9

Vrcholy $T_{1,2}$, $T_{3,3}$, $T_{4,4}$, $T_{5,6}$ a $T_{7,8}$ odpovídají časovým intervalům uvnitř kterých může být vykonána jedna podmnožina úloh (intervaly jsou dány hodnotami r a d).

Například $T_{1,2}$ odpovídá intervalu $\langle 1, 3)$, $T_{3,3}$ intervalu $\langle 3, 4)$.



Formulace pomocí lineárního programování

$f_e \in \mathbb{R}_0^+$ je proměnná udávající tok hranou $e \in E(G)$.

$$\begin{array}{|lll|}
\hline
\max \sum_{e\in\delta^+(s)} f_e - \sum_{e\in\delta^-(s)} f_e & & \\
& & \\
\text{s.t.} & \sum_{e\in\delta^-(v)} f_e = \sum_{e\in\delta^+(v)} f_e & v \in V(G)\setminus\{s,t\} \\
& l_e \le f_e \le u_e & e \in E(G) \\
\hline
\end{array}$$

Všimněme si, že pro libovolnou množinu A obsahující zdoj s a neobsahující spotřebič t platí:
$\sum_{e\in\delta^+(s)} f_e - \sum_{e\in\delta^-(s)} f_e = \sum_{e\in W^+(A)} f_e - \sum_{e\in W^-(A)} f_e$.

Dú: jednoduše dokažte z platnosti Kirchhofova zákona.

Ford-Fulkersonův Algoritmus

Za průkopníky v oblasti toků v sítích jsou považováni L. R. Ford, Jr. a D. R. Fulkerson (na obrázku). Jejich jména nese neznámější **algoritmus na výpočet maximálního toku v síti**, který publikovali v roce 1956.

Ford-Fulkersonův Algoritmus

Princip: Algoritmus je založen na **postupném zvětšování (zlepšování) toku** při zachování jeho přípustnosti.

Hrany vpřed a vzad

Hranu nazveme *hranou vpřed*, je-li orientována ve směru průchodu cestou od zdroje ke spotřebiči. *Hrana vzad* je orientována proti směru průchodu.

Zlepšující cesta

Zlepšující cesta vzhledem k toku f je taková **neorientovaná** cesta ze zdroje s ke spotřebiči t, jejíž každá hrana splňuje:

- je-li e hranou vpřed, pak $f_e < u_e$ ... tok můžeme zvětšit
- je-li e hranou vzad, pak $f_e > l_e$ ... tok můžeme zmenšit

Kapacita zlepšující cesty

Kapacita zlepšující cesty je maximální hodnota γ, o kterou lze změnit tok na zlepšující cestě.

Ford-Fulkersonův Algoritmus

Vstup: Síť (G, l, u, s, t)
Výstup: Maximální přípustný tok f z s do t.

1. Najdi přípustný tok f_e pro všechny $e \in E(G)$
2. Najdi zlepšující cestu P. Pokud neexistuje, ukonči hledání.
3. Spočítej γ, kapacitu zlepšující cesty P. Zlepši tok z s do t a jdi na 2.

Na hranách vpřed zvýšíme tok o γ a na hranách vzad snížíme tok o γ - přípustnost toku i Kirchhofův zákon tím zůstaly zachovány, ale celková velikost toku stoupla o γ.
Tuto cestu již nelze použít, jelikož v jedné hraně byl tok změně "nadoraz".

Tok z s do t je **maximální** právě tehdy, když neexistuje zlepšující cesta.

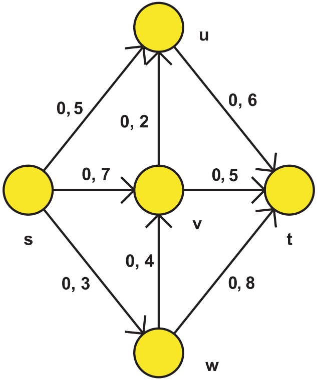
Hledání zlepšující cesty (značkovací prodcedura) pro Ford-Fulkersonův Algoritmus

Vstup: Síť (G, l, u, s, t), přípustný tok f
Výstup: Zlepšující cesta P

1. $m_v = FALSE \; \forall v \in V(G)$, $m_s = TRUE$ (označkuj vrchol s)
2. Existuje-li $e \in E(g)$ (přičemž v_i je počáteční a v_j je koncový vrchol hrany e) taková, že platí $m_i = TRUE$, $m_j = FALSE$ a $f_e < u_e$, pak označkujeme $m_j = TRUE$.
3. Existuje-li $e \in E(g)$ (přičemž v_i je počáteční a v_j je koncový vrchol hrany e) taková, že platí $m_i = FALSE$, $m_j = TRUE$ a $f_e > l_e$, pak označkujeme $m_i = TRUE$.
4. Pokud byl označkován t, hledání končí (P byla nalezena). Pokud nelze označi další vrchol, P neexistuje. V ostatních případech pokračuj body 2 a 3.

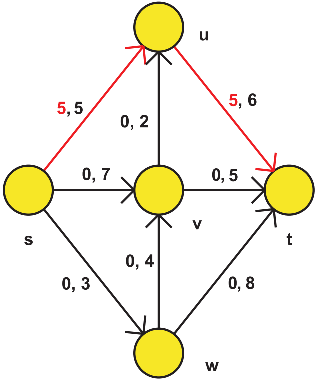
Ford-Fulkersonův Algoritmus
Příklad s nulovým dolním omezením toku

značení hran: f_e, u_e



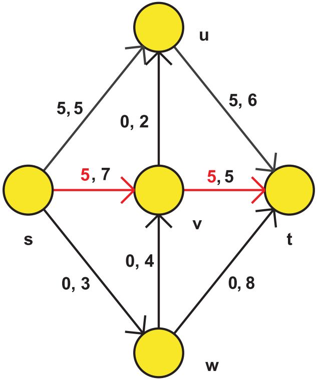
Ford-Fulkersonův Algoritmus
Příklad s nulovým dolním omezením toku

značení hran: f_e, u_e



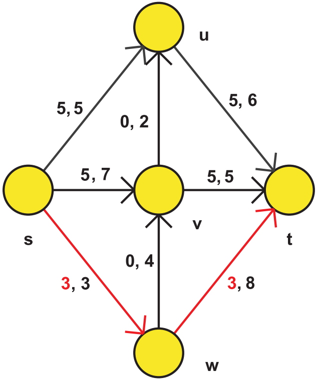
Ford-Fulkersonův Algoritmus
Příklad s nulovým dolním omezením toku

značení hran: f_e, u_e



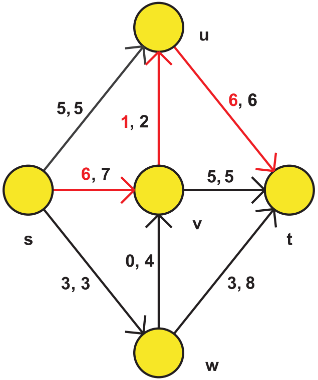
Ford-Fulkersonův Algoritmus
Příklad s nulovým dolním omezením toku

značení hran: f_e, u_e



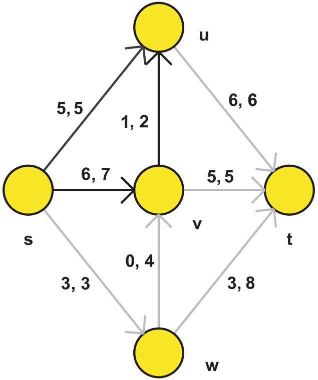
Ford-Fulkersonův Algoritmus
Příklad s nulovým dolním omezením toku

značení hran: f_e, u_e



Ford-Fulkersonův Algoritmus
Příklad s nulovým dolním omezením toku

značení hran: f_e, u_e



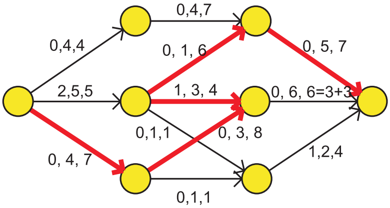
černé hrany propojují vrcholy z množiny A=$\{s, u, v\}$ (množina A charakterizuje řez s minimální kapacitou)

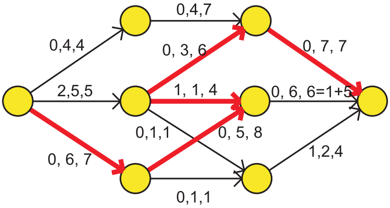
Ford-Fulkersonův Algoritmus
Příklad s nenulovým dolním omezením toku

Tento příklad zároveň ukazuje, že **značkování proti směru hran nelze v algoritmu vynechat**. Jinak by v tomto případě z výchozího toku (vlevo) nebylo možné dosáhnout maximálního toku (vpravo).

Značení hran: l_e, f_e, u_e.
Kapacita zlepšující cesty je rovna 2.

Výsledný tok je maximální - nalezněte řez o minimální kapacitě.





Problém minimálního řezu

Řez

Je-li $A \subset V(G)$, pak řez určený množinou A je množina hran, jejíž jeden vrchol leží v A a druhý nikoli. **Minimální řez** je řez s minimální kapacitou $C(A) = \sum_{e \in W^+(A)} u_e - \sum_{e \in W^-(A)} l_e$, který odděluje s a t.

Ford-Fulkersonova věta [1956]

Maximální hodnota toku z s do t v libovolné síti je rovna **kapacitě minimálního řezu**. Vyplývá z LP duality.

Po zastavení algoritmu je řez tvořen hranami, které nedovolují další značkování. Neboli tyto hrany splňují:
$f_e = u_e \; \forall e \in W^+(A)$ a $f_e = l_e \; \forall e \in W^-(A)$.

To znamená, že velikost toku je rovna:
$\sum_{e \in W^+(A)} f_e - \sum_{e \in W^-(A)} f_e = \sum_{e \in W^+(A)} u_e - \sum_{e \in W^-(A)} l_e$.

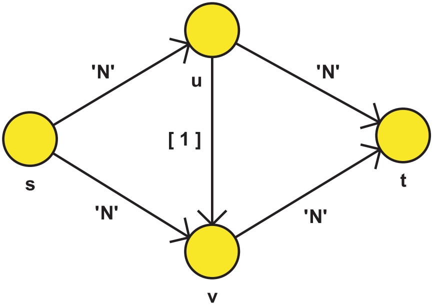
Celočíselnost

Integral Flow Theorem (Danzing and Fulkerson [1956])

Pokud jsou kapacity sítě celočíselné, potom **existuje celočíselný maximální tok**.

Vyplývá z totální unimodularity incidenční matice orientovaného grafu G.

Pokud hledáme zlepšující cestu **nevhodným způsobem**, může se tok zvyšovat jen po jednotkových krocích. Pro neceločíselná omezení toku a neceločíselný tok se **algoritmus nemusí vůbec zastavit**.



Edmonds a Karp [1972])

Pokud vždy vybíráme zlepšující cesty s **nejmenším počtem hran**, je časová náročnost algoritmu $O\left(m^2 \cdot n\right)$.

Další příklady formulované jako problém maximálního toku

Flow 1 - dynamický tok
Flow 2 - výběr reprezentantů - existence spodního omezení
Flow 3 - zaokrouhlování v tabulce - existence spodního omezení

Rozhodovací problém přípustného toku v síti

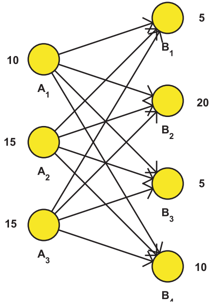
Podproblém úlohy maximálního toku.

Přípustný tok v síti

- **Instance**: Uspořádaná trojice (G, u, b) kde G je orientovaný graf s hranami o horním omezení $u : E(G) \to \mathbb{R}_0^+$ a dále s:
  - ohodnocením (**zdrojů/spotřebičů**) vrcholů $b : V(G) \to \mathbb{R}$ kde $\sum_{v \in V(G)} b_v = 0$.
- **Cíl**: Rozhodnout, zda existuje přípustný tok f tak, aby platilo $\sum_{e \in \delta^+(v)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e = b_v$ pro všechny $v \in G(V)$.

Příklad - dopravní úloha

Jeden produkt s danými **dodavateli** určitého množství (dodavatel reprezentován vrcholem s $b_v > 0$) a **odběrateli** určitého množství (odběratel reprezentován vrcholem s $b_v < 0$). Úkolem je rozhodnout, zda lze přepravit všechen produkt od dodavatelů k odběratelům v transportní síti s horním omezením linek u. Problém je popsán sítí (grafem) kde hrany grafu odpovídají úsekům potrubí, silnic, železnic, atd. s příslušnou kapacitou.



Cíl

Úkolem je rozhodnout, zda lze přepravit všechen produkt od dodavatelů A k odběratelům B v transportní síti s kapacitami linek u.

Rozhodovací problém přípustného toku v síti

Tento rozhodovací problém převedeme na **problém maximálního toku s nulovým dolním omezením**:

1. založíme zdroj s a přidáme hrany (s, v) s horním omezením $u_v = b_v$ pro všechny vrcholy, pro které platí $b_v > 0$
2. založíme spotřebič t a přidáme hrany (v, t) s horním omezením $u_v = -b_v$ pro všechny vrcholy, pro které platí $b_v < 0$
3. vyřešíme problém maximálního toku s nulovým dolním omezením (jako **počáteční přípustný tok** vezmeme nulový tok)
4. **pokud maximální tok saturuje** všechny hrany vycházející z s a/nebo vstupující do t, potom má problém přípustného toku v síti kladnou odpověď.

Nalezení počátečního přípustného toku pro Ford-Fulkersonův Algoritmus

Pro případ kdy $\forall e \in E(G)$; $l_e = 0$ - triviální - lze vzít nulový tok, jelikož ten splňuje Kirchhofův zákon.
Pro případ kdy $\exists e \in E(G)$; $l_e > 0$ převedeme hledání přípustného toku na **rozhodovací problém přípustného toku v síti** následujícím postupem:

1. Problém maximálního toku (s nenulovým dolním omezením) převedeme na **cirkulaci** přidáním hrany z t do s o nekonečném horním omezení, tím platí Kirchhofův zákon pro všechny vrcholy v síti (včetně s a t).
2. Hledaná přípustná cirkulace s dolním a horním omezením toku musí vyhovět následujícím omezením:

$$\sum_{e\in\delta^+(v)} f_e - \sum_{e\in\delta^-(v)} f_e = 0 \qquad v \in V(G)$$
$$l_e \leq f_e \leq u_e \qquad e \in E(G)$$

Nalezení počátečního přípustného toku pro Ford-Fulkersonův Algoritmus

3. Substitucí $f_e = f'_e + l_e$ obdržíme transformovaný problém:

   $\sum_{e\in\delta^+(v)} f'_e - \sum_{e\in\delta^-(v)} f'_e = b_v \qquad v \in V(G)$

   $0 \le f'_e \le u_e - l_e \qquad e \in E(G)$

   kde $b_v = \sum_{e\in\delta^-(v)} l_e - \sum_{e\in\delta^+(v)} l_e \qquad v \in V(G)$

4. Toto je **rozhodovací problém přípustného toku v síti** jelikož $\sum_{v\in V(G)} b_v = 0$ (povšimněte si, že l_e se nachází dvakrát v tomto součtu, jednou s kladným a jednou se záporným znaménkem).

5. Vyřešením tohoto rozhodovacího problému (t.j. přidáním s', t' a testem nasycenosti hran) zjistíme počáteční přípustnou cirkulaci/tok nebo rozhodneme, že neexistuje.

Závěr: problém nalezení **počátečního přípustného toku (s nenulovým dolním omezením)** jsme převedli na **problém maximálního toku s nulovým dolním omezením**.

Problém nejlevnějšího toku v síti

Rozšíření úlohy maximálního toku o ceny hran a exaktní rozdíl vstupního a výstupního toku ve zdrojích/spotřebičích.

Nejlevnější tok v síti

- **Instance**: Uspořádaná pětice (G, l, u, c, b) kde G je orientovaný graf s hranami o horním omezení $u : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ a dolním omezení $l : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ a dále s:
  - **cenami** hran $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$
  - ohodnocením (**zdrojů/spotřebičů**) vrcholů $b : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ kde $\sum_{v \in V(G)} b_v = 0$.
- **Cíl**: Nalézt přípustný tok f jehož cena $\sum_{e \in E(G)} f_e \cdot c_e$ je minimální (tj. chceme dopravit tok mezi uzly co nejlevněji) a zároveň platí $\sum_{e \in \delta^+(v)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e = b_v$ pro všechny $v \in G(V)$.
  Nebo rozhodnout, že přípustný tok neexistuje.

Nejlevnější tok v síti - formulace LP

Proměnná $f_e \in \mathbb{R}_0^+$ reprezentuje tok hranou $e \in E(G)$.

$$\min \sum_{e \in E(G)} c(e) \cdot f_e$$

$$\begin{array}{llr} \text{s.t.} & \sum_{e \in \delta^+(v)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e = b_v & v \in V(G) \\ & l_e \le f_e \le u_e & e \in E(G) \end{array}$$

Maximální tok lze převést na nejlevnější tok:

- založ návratovou hranu z t do s s horním omezením ∞ a cenou -1
- ostatní hrany mají ceny rovny 0
- $b_v = 0$ pro všechny vrcholy včetně s a t
- cirkulace s nejmenší (zápornou) cenou maximalizuje tok v návratové hraně

Párování - základní pojmy a problémy

Párování v grafu G je taková množina hran $P \subseteq E(G)$, že žádné dvě hrany z množiny P nemají společný vrchol.
Pokud všechny vrcholy G jsou incidentní s některou hranou P, potom P nazýváme **perfektním párováním**.
Problémy:

a) V daném grafu najít **maximální párování** (anglicky (Maximum) Cardinality Matching Problem), tj. párování které má největší počet hran.

b) **Maximální párování v bipartitním grafu** (spec. případ úlohy a).

c) V ohodnoceném grafu najít **nejlevnější maximální párování**, tj. nejlevnější párování ze všech, která jsou maximální.

d) V úplném ohodnoceném bipartitním grafu, jehož strany mají stejné počty vrcholů, najít **nejlevnější perfektní párování**. Tento problém se často nazývá **přiřazovací úloha** a je speciálním případem úlohy c) a speciálním případem **úlohy nejlevnějšího toku**.

Tyto problémy jsou polynomiální. My ukážeme algoritmy pro bipartitní grafy, které patří k jednodušším.

Maximální párování v bipartitním grafu

Lze řešit například pomocí úlohy **Maximálního toku**:

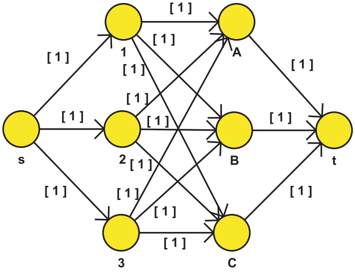
- založíme zdroj s a přidáme hrany (s, i) pro všechny $i \in X$
- založíme spotřebič t a přidáme hrany (j, t) pro všechny $j \in Y$
- orientaci hran zavedeme z s do X, z X do Y a z Y do t
- horní omezení všech hran jsou 1 a dolní omezení jsou 0
- vyřešíme problém maximálního toku z s do t a tím najdeme maximální párování

Příklad - Přiřazovací úloha

Máme n pracovníků a n úkolů. Pro každou **dvojici pracovník-úkol** známe náklady na vykonání úlohy tímto pracovníkem.

Cíl

Každému pracovníkovi přiřadit jeden úkol tak, aby celkové náklady byly minimální.



značení hran: u_e
náklady na vykonání úloh 1,2,3 pracovníky A,B,C

	A	B	C
1	6	2	4
2	3	1	3
3	5	3	4

Vyřešíme buď jako problém **nejlevnějšího toku v síti** (viz. obrázek) nebo formulujeme jako problém **přiřazovací úlohy**.

Přiřazovací úloha - Nejlevnější perfektní párování v úplném bipartitním grafu, jehož strany mají stejné počty vrcholů

Popis:

- G - úplný neorientovaný bipartitní graf se stranami X, Y takový, že $|X| = |Y| = n$.
- Ceny hran uspořádáme do matice, jejíž prvek $c_{ij} \in \mathbb{R}_0^+$ je cenou hrany $(i, j) \in X \times Y$.

Základní myšlenka Maďarského algoritmu:

- Libovolné **ohodnocení vrcholů** reálnými čísly $p(v)$ pro $v \in V(G)$ definuje transformované ceny předpisem: $c_{ij}^p = c_{ij} - p_i^x - p_j^y$.
- Touto transformací se pro každé perfektní párování **změní cena o tutéž hodnotu** (každý vrchol se účastní právě jednou) a díky tomu je to nejlevnější stále dáno totožným výběrem hran.

Přiřazovací úloha - Maďarský algoritmus

Ohodnocení vrcholů p nazveme **přípustným ohodnocením**, jsou-li všechny transformované ceny nezáporné, tj. $c_{ij}^p \geq 0$.
Je-li p přípustným ohodnocením, pak **grafem rovnosti** G^p nazveme faktor grafu G, který obsahuje právě ty hrany, jejichž cena je nulová.

Věta

Jestliže graf rovnosti G^p obsahuje perfektní párování P, pak P je optimálním řešením přiřazovací úlohy

Párování P má v grafu rovnosti G^p nulovou cenu. žádné jiné párování nemůže být levnější, protože jde o přípustné ohodnocení, kde $c_{ij}^p \geq 0$.

Maďarský algoritmus

Vstup: Úplný neorientovaný bipartitní graf G a váhy $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.
Výstup: Perfektní párování $P \subseteq E(G)$ jehož cena $\sum_{(i,j)\in P} c_{ij}$ je minimální.

1. Pro všechna $i \in X$ spočítej $p_i^x := \min_{j\in Y} \{c_{ij}\}$
   a pro všechna $j \in Y$ spočítej $p_j^y := \min_{i\in X} \{c_{ij} - p_i^x\}$
2. Sestroj gr. rovnosti G^p; $E(G^p) = \left\{(i,j) \in E(G); c_{i,j} - p_i^x - p_j^y = 0\right\}$
3. Nalezni maximální párování P v grafu G^p.
   Je-li toto párování perfektní, výpočet končí.
4. Není-li P perfektní, nalezni množinu $A \subseteq X$ a k ní v G^p incidentní množinu $B \subseteq Y$ takovou, že $|A| > |B|$. Spočítej
   $$d = min_{i\in A, j\in Y\setminus B} \left\{c_{i,j} - p_i^x - p_j^y\right\}$$
   a změň přípustné ohodnocení vrcholů takto:
   $$p_i^x := p_i^x + d \text{ pro všechna } i \in A$$
   $$p_j^y := p_j^y - d \text{ pro všechna } j \in B$$
   Pokračuj krokem 2.

Časová náročnost algoritmu je $O(n^4)$.

Maďarský algoritmus - příklad

Matice cen (pozor nejde o adjugovanou ani incidenční matici):

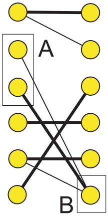
$$\begin{array}{rrrrrr}
5 & 3 & 7 & 4 & 5 & 4 \\
10 & 11 & 10 & 7 & 8 & 3 \\
18 & 7 & 6 & 6 & 6 & 2 \\
6 & 12 & 2 & 1 & 9 & 8 \\
8 & 4 & 4 & 4 & 1 & 1 \\
4 & 8 & 1 & 3 & 7 & 4
\end{array}$$

1. Nejdříve odečteme řádková minima od jednotlivých řádků - získáme ohodnocení vrcholů strany X.
   Ve vzniklé matici odečteme od každého sloupce sloupcové minimum - získáme ohodnocení vrcholů strany Y.

Maďarský algoritmus - příklad

3. Vytvoříme matici transformovaných cen, ke každému řádku si poznamenáme hodnotu p_i^x a ke každému sloupci hodnotu p_j^y. Sestrojíme graf rovnosti a v něm nalezneme maximální párování (hrany zvýrazněny tučně).
4. Jelikož výsledné párování není perfektní, tak značkováním z volného vrcholu nalezneme množiny A (modře) a B (zeleně). Z modrých prvků matice cen nalezneme minimum $d = 4$.

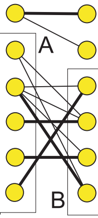
							p_i^x
	0	0	4	1	2	1	3
	5	8	7	4	5	0	3
	14	5	4	4	4	0	2
	3	11	1	0	8	7	1
	5	3	3	3	0	0	1
	1	7	0	2	6	3	1
p_j^y	2	0	0	0	0	0	



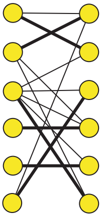
Maďarský algoritmus - příklad

- 4 Hodnoty p_i^x snížíme o d, hodnoty p_j^y zvýšíme o d, přepočítáme matici cen.
- 2 V transformované matici přibylo několik nul a v G^p několik hran. Hrana (5,6) naopak ubyla.
- 3 Párování nelze zvětšit.
- 4 Nalezneme množiny A (modře) a B (zeleně). Minimum $d = 1$.
- 2 Nyní již v grafu existuje perfektní párování. Cena je rovna součtu ohodnocení vrcholů, 18.

							p_i^x
	0	0	4	1	2	5	3
	1	4	3	0	1	0	7
	10	1	0	0	0	0	6
	3	11	1	0	8	11	1
	5	3	3	3	0	4	1
	1	7	0	2	6	7	1
p_j^y	2	0	0	0	0	-4	



							p_i^x
	0	0	5	2	3	6	3
	0	3	3	0	1	0	8
	9	0	0	0	0	0	7
	2	10	1	0	8	11	2
	4	2	3	3	0	4	2
	0	6	0	2	6	7	2
p_j^y	2	0	-1	-1	-1	-5	

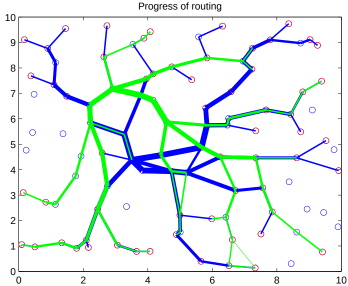


Multikomoditní toky

Doposud jsme předpokládali pouze jednu komoditu.
Zavedeme **množinu komodit** M transportované v téže síti.
Každá komodita má několik zdrojů a několik spotřebičů.
Proměnná $f_e^m \in \mathbb{R}_0^+$ reprezentuje tok komodity $m \in M$ hranou $e \in E(G)$.

Příklad: senzorová síť se dvěma komoditami a jedním spotřebičem pro každou z komodit:

- zdrojové vrcholy měří **teplotu(zelená)** a/nebo **vlhkost(modrá)** a zasílají je do jednoho koncentrátoru dat (spotřebiče) pro teplotu a jednoho pro vlhkost
- velikost toku (množství dat za čas)



Komunikační linky:

- kapacita (množství dat za čas)
- cena (energie na přenesení dat)

Nejlevnější multikomoditní toky v síti

- **Instance**: Uspořádaná pětice $(G, l, u, c, b^1 \dots b^m \dots b^{|M|})$ kde G je orientovaný graf s hranami o horním omezení $u : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, dolním omezení $l : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ a ceně $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ a dále s:
  - ohodnocením (**zdrojů/spotřebičů**) vrcholů $b^m : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ kde $\sum_{v \in V(G)} b_v^m = 0$ **pro všechny komodity** $m \in M$.
- **Cíl**: Nalézt přípustný tok f jehož cena $\sum_{e \in E(G)} \sum_{m \in M} f_e^m \cdot c_e$ je minimální (tj. chceme dopravit tok mezi uzly co nejlevněji) a zároveň platí $\sum_{e \in \delta^+(v)} f_e^m - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e^m = b_v^m$ pro všechny $v \in G(V)$ a všechny komodity $m \in M$.
  Nebo rozhodnout, že přípustný tok neexistuje.

Nejlevnější multikomoditní toky v síti - formulace LP

Proměnná $f_e^m \in \mathbb{R}_0^+$ reprezentuje tok komodity $m \in M$ hranou $e \in E(G)$.

$$\min \sum_{e \in E(G)} \sum_{m \in M} f_e^m \cdot c_e$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & \sum_{e \in \delta^+(v)} f_e^m - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e^m = b_v^m && v \in V(G), m \in M \\ & l_e \leq \sum_{m \in M} f_e^m \leq u_e && e \in E(G) \end{aligned}$$

- 1. Kirchhofův zákon platí v každém vrcholu pro **každou komoditu**
- Multikomoditní toky lze řešit pomocí LP - **polynomiální problém**
- Celočíselnost však není zaručena, jelikož matice A v LP **není totálně unimodulární**
- (Praktická zkušenost) ILP formulace, zaručující celočíselnost, je řešitelná pro velké instance v přijatelném čase

Literatura

Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin.
Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications.
Prentice Hall, 1993.

Jiří Demel.
Grafy a jejich aplikace.
Academia, 2002.

B. H. Korte and Jens Vygen.
Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms.
Springer, third edition, 2006.